Zur Darstellungstheorie von Darstellungsringen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Mathematik und Informatik der
Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Markus Deiml
geboren am 28.7.1968 in Augsburg

Gutachter

1. Prof. Dr. Burkhard Külshammer, Jena
2. Prof. Dr. Adalbert Kerber, Bayreuth
3. Dr. habil. Robert Boltje, Augsburg

Tag des Rigorosums: 1. Dezember 1997

Tag der öffentlichen Verteidigung: 15. Dezember 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gegenstand der Darstellungstheorie von endlichen Gruppen ist die Klassifikation der Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen einer endlichen Gruppe G über einem Körper F oder, äquivalent dazu, der Isomorphieklassen von FG-Moduln. Eine Möglichkeit, an diese Aufgabe heranzugehen, ist das Studium von Darstellungsringen. Man betrachtet dazu die Menge $a(FG)$ der Isomorphieklassen von „virtuellen" FG-Moduln, die durch direkte Summe und Tensorprodukt eine wohldefinierte Ringstruktur erhält. Diese Konstruktion wurde zuerst von J. Green eingeführt und wird daher oft als Green-Ring bezeichnet. Nach dem Satz von Krull-Schmidt ist $a(FG)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit den Isomorphieklassen von unzerlegbaren FG-Moduln als Basis.

Ist F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, so sind die unzerlegbaren FG-Moduln zugleich einfach, und die Abbildung, die jedem FG-Modul den zugehörigen Charakter zuordnet, ist ein Ringisomorphismus zwischen $a(FG)$ und dem Charakterring $\mathrm{R}(G)$ von G.

Im Fall, daß F die positive Charakteristik q besitzt, ist der Green-Ring jedoch meistens zu groß, um ihn (vernünftig) beherrschen zu können. Z.B. ist nach D. Higman [**13**] die Anzahl der Isomorphieklassen von unzerlegbaren FG-Moduln (und damit der $\mathbb{Z}$-Rang von $a(FG)$) genau dann endlich, wenn G eine zyklische q-Sylowgruppe besitzt. Stattdessen betrachtet man daher gewisse Teil- und Faktorringe von $a(FG)$, etwa den Ring $a(FG, \mathrm{Triv})$ der FG-Moduln mit trivialer Quelle oder den Grothendieck-Ring $c(FG)$ der Kategorie der FG-Moduln. Nicht zuletzt zählt auch der Burnside-Ring $b(G)$, nämlich der Grothendieck-Ring der Kategorie der endlichen G-Mengen, zu den Darstellungsringen. Sie alle sind kommutative $\mathbb{Z}$-Ordnungen, die eine eigene Darstellungstheorie besitzen, die es zu untersuchen gilt.

Um diese Aufgabe zu erleichtern, erweitert man üblicherweise den Koeffizientenring $\mathbb{Z}$ zu einem Körper k mit der Eigenschaft, daß die entstehende k-Algebra zerfällt. Auf diese Weise erhält man $A_k(FG) := k \otimes_{\mathbb{Z}} a(FG)$, $C_k(FG) := k \otimes_{\mathbb{Z}} c(FG)$, usw. Im Fall $\operatorname{char} k = 0$ ist die Struktur dieser Algebren meist bekannt. So folgt bereits aus den Arbeiten von R. Brauer, daß $C_{\mathbb{C}}(FG)$ halbeinfach ist. $B_{\mathbb{Q}}(G)$ und $A_{\mathbb{C}}(FG, \mathrm{Triv})$ sind nach L. Solomon [**21**] bzw. S. Conlon [**6**] ebenfalls halbeinfache Algebren, und dies trifft auch für $A_{\mathbb{C}}(FG)$ zu, wenn G eine zyklische q-Sylowgruppe besitzt (J. Green [**11**] und M. O'Reilly [**20**]).

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt daher auf dem Fall $\operatorname{char} k = p > 0$, sozusagen der *modularen* Darstellungstheorie von Darstellungsringen. Die beiden Charakteristiken p und q von k bzw. F können dabei sowohl gleiche wie auch verschiedene Primzahlen sein.

Zunächst werden wir dazu im ersten Kapitel den Begriff einer geschlossenen Algebra einführen. Er ermöglicht es, allgemeine Ergebnisse für die Darstellungsringe, die wir untersuchen wollen, zu formulieren. Durch eine geeignete Wahl des Koeffizientenrings wird nämlich jeder dieser Darstellungsringe zu einer geschlossenen Algebra. Es wird gezeigt, daß jede geschlossene R-Algebra A über dem Zerfällungskörper von R halbeinfach ist, und es wird beschrieben, wie die Blöcke nach Reduktion modulo p zusammenfallen. Eine wichtige Rolle spielen vor allem die Species von A, d.h. die R-Algebrenhomomorphismen von A nach R. Denn notwendig dafür, daß A eine geschlossene Algebra ist, ist die Existenz von „genügend vielen" Species.

Der Rest der Arbeit widmet sich der Reihe nach dem Burnside-Ring, Charakterring, Grothendieck-Ring und dem Trivial-Source-Ring. Durchwegs behandelt dabei der jeweils erste Abschnitt in jedem Kapitel den Fall char $k = 0$ und stellt eine Zusammenfassung von bekannten Tatsachen dar.

Die Species des Burnside-Rings sind die sogenannten Markenhomomorphismen, die bereits W. Burnside eingeführt hat. Sie zählen die Fixpunkte von G-Mengen unter jeweils einer festen Untergruppe von G, und durch sie wird $b(G)$ zu einer geschlossenen $\mathbb{Z}$-Algebra. Die modulare Darstellungstheorie des Burnside-Rings findet ihren Ausgangspunkt bei A. Dress [**9**], der die Primideale von $b(G)$ beschrieben hat. Dies hat T. Yoshida [**24**] dazu benutzt, um die primitiven Idempotente von $B_k(G)$ anzugeben. Davon ausgehend untersuchen wir in Kapitel 2 einzelne Blöcke von $B_k(G)$. Sie sind indiziert über die Konjugationsklassen von p-perfekten Untergruppen von G, und wir nennen B_H den zu $H \leq G$ gehörigen Block, falls H p-perfekt ist. Wir geben eine kanonische k-Basis von B_H an, mit deren Hilfe wir das Jacobson-Radikal $\mathrm{J}B_H$ von B_H beschreiben (Satz 2.16) und die Loewy-Länge $l(B_H)$ von B_H nach oben durch $r + 1$ abschätzen können, wenn $|\mathrm{N}_G(H) : H|_p = p^r$ ist (Satz 2.18). Ist G eine p-Gruppe, so ist $B_k(G)$ eine lokale Algebra, und wir finden auch eine Abschätzung der Loewy-Länge nach unten: Bezeichnet $\Phi(G)$ die Frattinigruppe von G, so gilt $l(B_k(G)) \geq r + 1$, wobei r der Rang der elementarabelschen p-Gruppe $G/\Phi(G)$ ist (Satz 2.20). Ist G zusätzlich abelsch, so wird diese Abschätzung zur Gleichheit. Abschließend geben wir ein Kriterium an, wann ein Block von $B_k(G)$ für eine beliebige endliche Gruppe G eine symmetrische Algebra ist. Dabei kommt es darauf an, genügend Elemente im Sockel eines Blocks zu finden. Es stellt sich heraus, daß B_H genau dann symmetrisch ist, falls $p^2 \nmid |\mathrm{N}_G(H) : H|$ ist (Satz 2.27). Für $B_k(G)$ selbst war eine ähnliches Kriterium bereits bekannt (siehe [**12**]).

In Kapitel 3 untersuchen wir den Charakterring. Wir betrachten dabei $\mathrm{R}(G)$ über einem Koeffizientenring $\mathcal{O}$, der die Werte aller Charaktere von G enthält. Wir sind dann in der Lage, Species des Charakterrings zu definieren, indem wir die Charaktere jeweils an einem festen Gruppenelement auswerten. Auf diese Weise können wir die Ergebnisse aus Kapitel 1 auf den Charakterring anzuwenden. Wir geben die primitiven Idempotente von $R_k(G)$ explizit an (Satz 3.2 und 3.5) und zeigen, daß $\mathrm{R}_k(G)$ genau dann halbeinfach ist, wenn p die Gruppenordnung von G nicht teilt (Satz 3.6). Genauer charakterisiert Satz 3.6 die einfachen Blöcke. Nebenbei erhalten wir an dieser Stelle ein bekanntes Ergebnis, das auf S. Berman [**4**] zurückgeht: Der Charakterring enthält außer 0 und 1 keine Idempotente. Als nächstes stellen wir fest, daß $\mathrm{R}_k(G)$ im Gegensatz zu $B_k(G)$ in jedem Fall eine symmetrische k-Algebra ist (Satz 3.8), und wir beweisen einen Induktionssatz für $\mathrm{R}_k(G)$, der auf den p-quasielementaren Untergruppen von G basiert (Satz 3.11). Außerdem beschreiben wir das Radikal von $\mathrm{R}_k(G)$ als Kern der Zerlegungsabbildung (Satz 3.14) und den Sockel als Ring der projektiven Charaktere (Satz 3.19). Leider können wir keine obere Schranke für die Loewy-Länge von $R_k(G)$, dafür aber immerhin für den Nilpotenzgrad eines Radikal-Elements angeben. Sie wird gegeben durch den p-Exponenten von G (Satz 3.16).

Anstelle der gewöhnlichen Charaktere benutzt man beim Grothendieck-Ring die Brauercharaktere von G, um Species zu definieren. Sie zeigen, daß $c(FG)$ über einem Körper der Charakteristik 0, der die Brauercharakterwerte enthält, ein halbeinfacher Faktorring des Green-Rings ist. Der modulare Grothendieck-Ring $C_k(FG)$ dagegen ist genau dann halbeinfach, wenn $p = q$ oder $p \nmid |G|$ ist (Satz 4.5). Bei der Untersuchung von $C_k(FG)$ beschränken wir uns ansonsten auf die Beschreibung der primitiven Idempotente (Satz 4.2 und 4.4), dem Nachweis, daß $C_k(FG)$ eine symmetrische Algebra ist (Satz 4.7), und einer Übertragung der Nilpotenzaussagen des Charakterrings auf den Grothendieck-Ring (Satz 4.8).

Im letzten Kapitel betrachten wir den Trivial-Source-Ring oder den Ring der q-Permutationsmoduln $a(FG, \mathrm{Triv})$. Die Species des Trivial-Source-Rings wurden zum ersten Mal von S. Conlon angegeben. Wir bestimmen ein Kriterium dafür, wann diese Species nach der Reduktion modulo p zusammenfallen und müssen dazu die Fälle $p \neq q$ und $p = q$ unterscheiden. Die Ergebnisse sind in Satz 5.7 und Satz 5.11 zu finden. Es folgt, daß $A_k(FG, \mathrm{Triv})$ genau dann halbeinfach ist, wenn $p \nmid |G|$ ist (Satz 5.13). Diese Aussage beruht wie beim Charakterring auf der Charakterisierung der einfachen Blöcke von $A_k(FG, \mathrm{Triv})$. Schließlich zeigen wir, daß auch $a(FG, \mathrm{Triv})$ außer 0 und 1 keine Idempotente besitzt.

Bedanken möchte ich mich abschließend bei der Universität Augsburg, die einen Teil meiner Promotionszeit mit einem Stipendium unterstützt hat, und natürlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. B. Külshammer für viele lehrreiche Stunden und für seine Unterstützung, die mir immer gewiß war.

Notation

Allgemeines

$\mathbb{N}$	Halbring der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{F}_p$	Galois-Feld mit p Elementen
$n_p, n_{p'}$	p- bzw. p'-Anteil einer natürlichen Zahl n

Gruppen

$\lvert G\rvert$	Ordnung einer Gruppe G
$\mathrm{Z}(G)$	Zentrum von G
$\Phi(G)$	Frattinigruppe von G
$G_p, G_{p'}$	p- bzw. p'-Elemente von G
$g_p, g_{p'}$	p- bzw. p'-Faktor von $g \in G$
$\langle g\rangle$	von g erzeugte Untergruppe von G
$\sim_G, \lesssim_G$	konjugiert bzw. subkonjugiert in G
$\lvert G : H\rvert$	Index einer Untergruppe H in G
G/H	Menge der Linksnebenklassen von G nach H
$\mathrm{N}_G(H)$	Normalisator von H in G
$\mathrm{C}_G(H)$	Zentralisator von H in G
$\mathrm{O}^p(H)$	p-Residuum von H
${}^g h, {}^g H$	ghg^{-1} bzw. gHg^{-1}
Res_H^G	Restriktion von G nach H
Ind_H^G	Induktion von H nach G
Inf_H^G	Inflation von G/H nach G

Ringe und Algebren

$\operatorname{Spec} R$	Primideal-Spektrum eines kommutativen Rings R
R_P	Lokalisierung von R nach einem Primideal P
$\mathrm{rk}_R\, A$	R-Rang einer freien R-Algebra A
$\mathrm{J}A$	Jacobson-Radikal von A
$\mathrm{J}^n A$	$(\mathrm{J}A)^n$ höhere Radikalpotenzen von A
$\operatorname{Soc} A$	Sockel von A
$l(A)$	Loewy-Länge von A

Kapitel 1 Seite

$\mathrm{Sp}_R(A)$	Menge der Species einer R-Algebra A	1
$\mathrm{Supp}(\varphi, P)$	Träger von φ bei P	1
$\varphi \sim_P \psi$	P-Äquivalenz von Species φ, ψ	2
$\mathcal{R}_P$	Repräsentantensystem für die P-Äquivalenzklassen von $\mathrm{Sp}_R(A)$	2
e_φ	primitives Idempotent von A_K	4
$\varphi \sim \psi$	Zusammenhang von Species φ, ψ	4
$\mathcal{R}$	Repräsentantensystem für die Zusammenhangsklassen von $\mathrm{Sp}_R(A)$	5
f_φ	primitives Idempotent von A_P	6
S_φ	einfacher A_k-Modul	8

Kapitel 2

$b(G)$	Burnside-Ring von G	10
$B_{\mathcal{O}}(G)$	$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} b(G)$	10
$[X]$	Isomorphieklasse einer G-Menge X	10
$\mathcal{S}$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Untergruppen von G	10
φ_H	Markenhomomorphismus von H	10
e_H	primitives Idempotent von $B_K(G)$	11
$\mathcal{P}$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von p-perfekten Untergruppen von G	13
$\mathcal{S}_H$	$\{I \in \mathcal{S} : \mathrm{O}^p(I) \sim_G H\}$	13
S_H	Element aus $\mathcal{S}_H$ mit $p \nmid \lvert \mathrm{N}_G(S_H)/S_H \rvert$	14
$\overline{f_H}$	primitives Idempotent von $B_k(G)$	14
B_H	Block $B_k(G)\overline{f_H}$ von $B_k(G)$	15
$b'(G,H)$	$\bigoplus_{I \in \mathcal{S}, H \not\lesssim I} \mathbb{Z}\,[G/I]$	15

Kapitel 3

$\mathrm{R}(G)$	Charakterring von G	28
$\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$	$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G)$	28
$\mathrm{Irr}(G)$	Menge der irreduziblen Charaktere von G	28
σ_g	Species von $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$	28
$\mathcal{C}$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G	28
e_g	primitives Idempotent von $\mathrm{R}_K(G)$	28
$\mathcal{C}_{p'}$	Repräsentantensystem für die p'-Konjugationsklassen von G	29
$\mathcal{C}_g$	$\{h \in \mathcal{C} : h_{p'} \sim_G g\}$	29
φ_S	Brauercharakter eines kG-Moduls S	30
$\mathrm{IBr}(G)$	Menge der irreduziblen Brauercharaktere von G	30
$\overline{f_g}$	primitives Idempotent von $\mathrm{R}_k(G)$	30
$\hat{\chi}$	zu χ dualer Charakter	32
$\mathcal{Z}$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von zyklischen Untergruppen von G	32

		Seite
$\mathcal{E}, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}'_p$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von elementaren, p-elementaren bzw. p-quasielementaren Untergruppen von G	32
$\mathrm{R}^p(G)$	Brauercharakterring von G	34
d	Zerlegungsabbildung $\mathrm{R}(G) \to \mathrm{R}^p(G)$	34
ψ^n	n-ter Adams-Operator	35
$\mathrm{IPr}(G)$	Menge der unzerlegbar projektiven Charaktere von G	38
$\mathrm{R}^{pr}(G)$	der von $\mathrm{IPr}(G)$ erzeugte Teilring von $\mathrm{R}(G)$	38

Kapitel 4

$c(FG)$	Grothendieck-Ring der Kategorie der FG-Moduln	39
$C_{\mathcal{O}}(FG)$	$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} c(FG)$	39
$[\![M]\!]$	Äquivalenzklasse eines FG-Moduls M in $c(FG)$	39
$\mathcal{S}$	Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen von einfachen FG-Moduln	39
σ_g	Species von $C_{\mathcal{O}}(FG)$	40
$\mathcal{C}_{q'}$	Repräsentantensystem für die q'-Konjugationsklassen von G	40
e_g	primitives Idempotent von $C_K(FG)$	40
$\mathcal{C}_{\{p,q\}'}$	Repräsentantensystem für die $\{p,q\}'$-Konjugationsklassen von G	41
$\mathcal{C}_{q',g}$	$\{h \in \mathcal{C}_{q'} : h_{p'} \sim_G g\}$	41
$\overline{f_g}$	primitives Idempotent von $C_k(FG)$	41

Kapitel 5

$a(FG, \mathrm{Triv})$	Trivial-Source-Ring von FG	44
$A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv})$	$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} a(FG, \mathrm{Triv})$	44
$[M]$	Isomorphieklasse eines q-Permutationsmoduls M in $a(FG, \mathrm{Triv})$	44
$\mathcal{S}_q(G)$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von q-Untergruppen von G	44
$\mathcal{P}_Q$	Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen von unzerlegbar projektiven $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$-Moduln	44
$\mathcal{Y}$	kanonische Basis von $a(FG, \mathrm{Triv})$	44
$\sigma_{Q,g}$	Species von $A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv})$	45
X	$\{(Q,g) : Q$ ist q-Untergruppe von $G,\ g \in \mathrm{N}_G(Q)_{q'}\}$	46
$\mathcal{X}$	Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von X	46
$e_{Q,g}$	primitives Idempotent von $A_K(FG, \mathrm{Triv})$	46
$X_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{Q,g}$	siehe Seite	52
$\overline{f_{Q,g}}$	primitives Idempotent von $A_k(FG, \mathrm{Triv})$	52

KAPITEL 1

Geschlossene Algebren

Da die Ringstrukturen der verschiedenen Darstellungsringe einander ähnlich sind, möchte man sie natürlich so weit wie möglich einheitlich behandeln. Als geeignete Verallgemeinerung stellt sich der von D. Kletzing in [**17**] eingeführte Begriff der geschlossenen Algebra heraus. Wir werden später sehen, daß die meisten Darstellungsringe geschlossene Algebren sind, wenn man den Koeffizientenbereich geeignet wählt.

1. Definition und Eigenschaften

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen eine Zusammenfassung von Ergebnissen aus [**17**].

Seien R ein Dedekindring und A eine kommutative R-Algebra mit Einselement, die torsionsfrei als R-Modul ist. Einen Homomorphismus $\varphi : A \to R$ von R-Algebren nennen wir *Species*, und wir bezeichnen mit $\mathrm{Sp}_R(A)$ die Menge aller Species von A. Außerdem sei $\operatorname{Spec} R$ das Primideal-Spektrum von R. Für $\varphi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ und $P \in \operatorname{Spec} R$ sei das Primideal $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ von A definiert durch

$$\mathfrak{p}(\varphi, P) := \{a \in A : \varphi(a) \in P\}.$$

Wir setzen

$$\mathrm{Supp}(\varphi, P) := \{\psi \in \mathrm{Sp}_R(A) : \mathfrak{p}(\psi, 0) \subseteq \mathfrak{p}(\varphi, P)\}.$$

und nennen $\mathrm{Supp}(\varphi, P)$ den *Träger* von φ bei P. Offenbar ist stets $\varphi \in \mathrm{Supp}(\varphi, P)$.

Definition 1.1. Wir nennen A eine *geschlossene* R-Algebra, falls $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathrm{Sp}_R(A)$ mit der Eigenschaft

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_i = 0$$

existieren.

Es leiten sich folgende elementare Eigenschaften von geschlossenen Algebren ab:

Satz 1.2. *Sei A eine geschlossene R-Algebra. Dann gilt:*

(i) *A ist eine ganze Ringerweiterung von R.*
(ii) *Jedes Primideal in A ist von der Form $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ für ein $\varphi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ und ein $P \in \operatorname{Spec} R$.*
(iii) *A besitzt Krull-Dimension 1; insbesondere sind Primideale der Form $\mathfrak{p}(\varphi, 0)$ minimal und Primideale der Form $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ für $P \neq 0$ maximal.*

Beweis. [**17**, Prop 1.2]. ∎

Definition 1.3. Sei $P \in \operatorname{Spec} R$. Zwei Elemente $\varphi, \psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ nennen wir *P-äquivalent*, falls $\mathfrak{p}(\psi, P) = \mathfrak{p}(\varphi, P)$ gilt. Gegebenenfalls schreiben wir $\varphi \sim_P \psi$.

Lemma 1.4.

(i) *Für $\varphi, \psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ und $P \in \operatorname{Spec} R$ sind äquivalent:*
  (1) $\varphi \sim_P \psi$.
  (2) $\operatorname{Supp}(\varphi, P) = \operatorname{Supp}(\psi, P)$.
  (3) $\psi \in \operatorname{Supp}(\varphi, P)$.
  (4) $\varphi \equiv \psi \pmod{P}$.

Insbesondere ist $\operatorname{Supp}(\varphi, 0) = \{\varphi\}$.

(ii) *Existieren* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \operatorname{Sp}_R(A)$ *mit* $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i = 0$, *so ist* $\operatorname{Sp}_R(A) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. *Insbesondere besitzt eine geschlossene R-Algebra nur endlich viele Species.*

Beweis. (i) (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3): Trivial.

(3)$\Rightarrow$(4): Seien $\psi \in \operatorname{Supp}(\varphi, P)$ und $a \in A$. Dann ist $0 = \psi(a) \Leftrightarrow \psi(a) = \psi(a \Leftrightarrow \psi(a) \cdot 1_A)$, d.h. $a \Leftrightarrow \psi(a) \cdot 1_A \in \mathfrak{p}(\psi, 0) \subseteq \mathfrak{p}(\varphi, P)$. Folglich ist $\varphi(a) \Leftrightarrow \psi(a) = \varphi(a \Leftrightarrow \psi(a) \cdot 1_A) \in P$.

(4)$\Rightarrow$(1): Sei $a \in \mathfrak{p}(\varphi, P)$, d.h. $\varphi(a) \in P$. Im Fall $\varphi \equiv \psi \pmod{P}$ ist $\varphi(a) \Leftrightarrow \psi(a) \in P$, also auch $\psi(a) \in P$. Dies zeigt $\mathfrak{p}(\varphi, P) \subseteq \mathfrak{p}(\psi, P)$. Aus Symmetriegründen ist $\mathfrak{p}(\varphi, P) = \mathfrak{p}(\psi, P)$, d.h. $\varphi \sim_P \psi$.

(ii) Sei $\varphi \in \operatorname{Sp}_R(A)$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i = 0 \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$ und damit $\operatorname{Ker} \varphi_i \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Folglich ist $\varphi_i \in \operatorname{Supp}(\varphi, 0)$, also $\varphi = \varphi_i$ nach (i). $\square$

Wir gehen jetzt über zu Lokalisierungen. Für $P \in \operatorname{Spec} R$ bezeichnen wir mit R_P die Lokalisierung von R nach P. Zu jedem $\varphi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ erhalten wir eine lokale R_P-Algebra $A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$. Aus Lemma 1.4(i) folgt, daß jedes $\psi \in \operatorname{Supp}(\varphi, P)$ einen Homomorphismus $\hat{\psi} : A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \to R_P$ von R_P-Algebren induziert, indem man $\hat{\psi}(\frac{a}{b}) := \frac{\psi(a)}{\psi(b)}$ für $a \in A$ und $b \in A \setminus \mathfrak{p}(\varphi, P)$ definiert.

Der nächste Satz zeigt, daß sich die Geschlossenheit von A auch auf seine Lokalisierungen vererbt.

Satz 1.5. *Seien A eine geschlossene R-Algebra, $\varphi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ und $P \in \operatorname{Spec} R$. Dann gilt:*

(i) $A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$ *ist eine geschlossene R_P-Algebra.*
(ii) $\operatorname{Sp}_{R_P}(A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}) = \{\hat{\psi} : \psi \in \operatorname{Supp}(\varphi, P)\}$.
(iii) $A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$ *ist frei als R_P-Modul mit* $\operatorname{rk}_{R_P} A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \leq |\operatorname{Supp}(\varphi, P)|$.
(iv) *Ist A frei als R-Modul und* $\operatorname{rk}_R A = |\operatorname{Sp}_R(A)|$, *so ist* $\operatorname{rk}_{R_P} A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} = |\operatorname{Supp}(\varphi, P)|$.

Beweis. [**17**, Prop. 1.3, Cor. 1.4 und Cor. 1.6]. $\square$

Wir wählen ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}_P$ für die P-Äquivalenzklassen von $\operatorname{Sp}_R(A)$. Für $\varphi \in \mathcal{R}_P$ sei der Homomorphismus $i_\varphi : R_P \otimes_R A \to A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$ von R_P-Algebren gegeben durch $i_\varphi(x \otimes a) := x\, \frac{a}{1_A}$. Dann gilt:

Satz 1.6. *Die Abbildung*

$$i := \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} i_\varphi \ : \ R_P \otimes_R A \to \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} A_{\mathfrak{p}(\varphi, P)}$$

ist ein Isomorphismus von R_P-Algebren.

Beweis. [**17**, Prop. 1.5]. □

2. Idempotente

Seien R ein Dedekindring, K der Quotientenkörper von R, $P \neq 0$ ein Primideal in R, $k := R/P$ der Restklassenkörper und A eine kommutative torsionsfreie R-Algebra, die endlich erzeugt als R-Modul ist. Wir setzen $A_K := K \otimes_R A$ und $A_k := k \otimes_R A$. Für jedes Element $\varphi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ bezeichnen wir auch die Fortsetzung $A_K \to K$ mit φ.

Zunächst geben wir einen nützlichen Satz an, mit Hilfe dessen wir nachweisen werden, daß gewisse Darstellungsringe geschlossene Algebren sind.

Satz 1.7. *Es ist $|\,\mathrm{Sp}_R(A)| \leq \dim_K A_K$, und die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *A ist eine geschlossene R-Algebra.*
(2) *Die Abbildung $\bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Sp}_R(A)} \varphi \ : \ A_K \ \to \ K^{|\,\mathrm{Sp}_R(A)|}$ ist ein Isomorphismus von K-Algebren.*
(3) *A_K ist eine zerfallende halbeinfache K-Algebra.*
(4) $|\,\mathrm{Sp}_R(A)| = \dim_K A_K$.

Beweis. Da A endlich erzeugt ist, ist $|\,\mathrm{Sp}_R(A)| < \infty$, etwa $\mathrm{Sp}_R(A) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Wegen $0 \in \operatorname{Spec} R$ zeigt Lemma 1.4(i), daß die Kerne $\operatorname{Ker} \varphi_1, \dots,\ \operatorname{Ker} \varphi_n$ paarweise verschieden sind. Daher ist die Abbildung

$$\Phi := \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \ : \ A_K \to K^n$$

nach dem Chinesischen Restsatz ein Epimorphismus von K-Algebren; insbesondere ist $\dim_K A_K \geq n = |\,\mathrm{Sp}_R(A)|$.

(1)⇒(2): Ist A eine geschlossene R-Algebra, so ist $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i = 0$, d.h. Φ ist auch injektiv.

(2)⇒(3): Klar.

(3)⇒(4): Sei A_K eine zerfallende halbeinfache K-Algebra. Da A_K kommutativ ist, ist nach Wedderburn $A_K \cong K^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Verknüpft man diesen Isomorphismus für $i = 1, \dots, m$ mit der Projektion $K^m \to K$ auf die i-te Komponente, so erhält man m paarweise verschiedene Species $A_K \to K$. Daher ist

$$|\,\mathrm{Sp}_R(A)| = |\,\mathrm{Sp}_K(A_K)| \geq m = \dim_K A_K.$$

(4)⇒(1): Im Fall $\dim_K A_K = |\,\mathrm{Sp}_R(A)| = n$ ist Φ ein Isomorphismus. Daher ist $\cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{Ker} \Phi = 0$, d.h. A ist eine geschlossene R-Algebra. □

Sei ab jetzt A eine geschlossene R-Algebra. Ziel dieses Abschnitts ist es, die primitiven Idempotente von A, A_K und A_k zu bestimmen.

Satz 1.7 zeigt, daß A_K in eine direkte Summe von $|\operatorname{Sp}_R(A)|$ Kopien von K zerfällt. Die primitiven Idempotente von A_K stehen also in Bijektion zu $\operatorname{Sp}_R(A)$. Das zu $\psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ gehörige primitive Idempotent e_ψ ist dabei charakterisiert durch

$$\varphi(e_\psi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi = \psi, \\ 0, & \text{falls } \varphi \neq \psi. \end{cases}$$

Wir betrachten die Zariski-Topologie von $\operatorname{Spec} A$. Per Definition ist eine Teilmenge von $\operatorname{Spec} A$ in dieser Topologie genau dann abgeschlossen, wenn sie von der Form

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

für ein Ideal I in A ist. Dann liefert die Abbildung

$$\omega : e \mapsto \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : e \notin \mathfrak{p}\}$$

eine Bijektion zwischen den Idempotenten von A und den offenen abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} A$ (siehe z.B. [**16**, p. 406, Thm. 7.3]). Ein Idempotent ist dabei genau dann primitiv, wenn die zugehörige Menge $\omega(e)$ eine Zusammenhangskomponente bildet.

Wir wollen auf diesem Weg die primitiven Idempotente von A bestimmen, d.h. wir müssen die Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Spec} A$ ermitteln.

Ob zwei Primideale $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ und $\mathfrak{p}(\psi, Q)$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec} A$ liegen, hängt offenbar nur von φ und ψ ab; denn für jedes $P' \in \operatorname{Spec} R$ liegt $\mathfrak{p}(\varphi, P')$ im Abschluß von $\{\mathfrak{p}(\varphi, 0)\}$, und daher liegen die Ideale $\mathfrak{p}(\varphi, P')$ ($P' \in \operatorname{Spec} R$) alle in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec} A$.

Definition 1.8. Wir nennen $\varphi, \psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ *zusammenhängend* und schreiben $\varphi \sim \psi$, wenn $\varphi_0 = \varphi,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_{n-1},\ \varphi_n = \psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ und $P_1, \dots, P_n \in \operatorname{Spec} R$ mit $\varphi_{i-1} \sim_{P_i} \varphi_i$ für $i = 1, \dots, n$ existieren.

Satz 1.9. *Für $\varphi, \psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ und $P, Q \in \operatorname{Spec} R$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Die Primideale $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ und $\mathfrak{p}(\psi, Q)$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec} A$.*
(2) *Es existieren minimale Primideale $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n$ in A mit $\mathfrak{p}(\varphi, P) \in V(\mathfrak{p}_0)$, $\mathfrak{p}(\psi, Q) \in V(\mathfrak{p}_n)$ und $V(\mathfrak{p}_{i-1}) \cap V(\mathfrak{p}_i) \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$.*
(3) *φ und ψ sind zusammenhängend.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2): Wir bezeichnen mit M die Menge aller minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ in A mit der Eigenschaft, daß eine Kette $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ von minimalen Primidealen mit $\mathfrak{p}(\varphi, P) \in V(\mathfrak{p}_0)$ und $V(\mathfrak{p}_{i-1}) \cap V(\mathfrak{p}_i) \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$ existiert, und wir setzen

$$X := \bigcup_{\mathfrak{p} \in M} V(\mathfrak{p}), \qquad Y := \bigcup_{\mathfrak{p} \notin M} V(\mathfrak{p}).$$

Nach der Definition von M sind X und Y disjunkt und $\operatorname{Spec} A = X \mathbin{\dot\cup} Y$. Da A nur endlich viele minimale Primideale enthält (siehe Satz 1.2(iii) und Lemma 1.4(ii)), sind X und Y

als endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen. Daher ist X eine offene abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} A$.

Seien jetzt Z die Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec} A$, in der $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ und $\mathfrak{p}(\psi, Q)$ enthalten sind, und $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. Da Z abgeschlossen und offen ist, existieren Ideal I und J in A mit $Z = V(I)$ und $\operatorname{Spec} A \setminus Z = V(J)$, und es gilt:

$$\mathfrak{p} \in Z \;\Rightarrow\; I \subseteq \mathfrak{p} \;\Rightarrow\; I \subseteq \mathfrak{p}' \;\Rightarrow\; \mathfrak{p}' \in Z,$$
$$\mathfrak{p}' \in Z \;\Rightarrow\; J \not\subseteq \mathfrak{p}' \;\Rightarrow\; J \not\subseteq \mathfrak{p} \;\Rightarrow\; \mathfrak{p} \in Z,$$

also $\mathfrak{p} \in Z \iff \mathfrak{p}' \in Z$. Dies zeigt, daß X in Z enthalten und damit $\mathfrak{p}(\psi, Q) \in Z = X$ ist.

(2)⇒(3): Sei (2) erfüllt, und für $i = 0, \dots, n$ sei $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}(\varphi_i, 0)$ für ein $\varphi_i \in \operatorname{Sp}_R(A)$. Für $i = 1, \dots, n$ existiert nach Voraussetzung ein Primideal $\mathfrak{p}(\varphi', P') \in V(\mathfrak{p}(\varphi_{i-1}, 0)) \cap V(\mathfrak{p}(\varphi_i, 0))$. Folglich sind φ_{i-1} und φ_i in $\operatorname{Supp}(\varphi', P')$ enthalten und daher $\varphi_{i-1} \sim_{P'} \varphi' \sim_{P'} \varphi_i$ nach Lemma 1.4. Wegen $\mathfrak{p}(\varphi_0, 0) \subseteq \mathfrak{p}(\varphi, P)$ und $\mathfrak{p}(\varphi_n, 0) \subseteq \mathfrak{p}(\psi, Q)$ sind außerdem $\varphi \sim_P \varphi_0$ und $\varphi_n \sim_Q \psi$, d.h. φ und ψ sind zusammenhängend.

(3)⇒(1): Seien φ und ψ zusammenhängend, d.h. es existieren $\varphi_0 = \varphi,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_{n-1},\ \varphi_n = \psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ und $P_1, \dots, P_n \in \operatorname{Spec} R$ mit $\varphi_{i-1} \sim_{P_i} \varphi_i$ für $i = 1, \dots, n$. Nach der Vorbemerkung liegen für $i = 2, \dots, n$ die Primideale $\mathfrak{p}(\varphi_{i-1}, P_{i-1})$ und $\mathfrak{p}(\varphi_{i-1}, P_i) = \mathfrak{p}(\varphi_i, P_i)$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Spec} A$. Dies zeigt, daß $\mathfrak{p}(\varphi_0, P_1) = \mathfrak{p}(\varphi_1, P_1)$ und $\mathfrak{p}(\varphi_n, P_n)$ und damit auch $\mathfrak{p}(\varphi, P)$ und $\mathfrak{p}(\psi, Q)$ in derselben Zusammenhangskomponente liegen. □

Ist $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem für die Zusammenhangsklassen von $\operatorname{Sp}_R(A)$, so gilt:

Satz 1.10. *Die primitiven Idempotente von A sind $\sum_{\psi \sim \varphi} e_\psi$ $(\varphi \in \mathcal{R})$.*

Beweis. Nach Satz 1.9 sind $Z_\varphi := \{\mathfrak{p}(\psi, Q) : \psi \sim \varphi,\ Q \in \operatorname{Spec} R\}$ $(\varphi \in \mathcal{R})$ die Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Spec} A$. Ist ω die vorher angegebene Bijektion zwischen den Idempotenten von A und den offenen abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} A$, so sind $\omega^{-1}(Z_\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{R})$ die primitiven Idempotente von A.

Sei jetzt $\varphi \in \mathcal{R}$ und $e := \omega^{-1}(Z_\varphi)$ ein primitives Idempotent, d.h. $Z_\varphi = \omega(e) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : e \notin \mathfrak{p}\}$. Dann ist e auch ein Idempotent in A_K, also

$$e = \sum_{\rho \in X} e_\rho$$

für eine Teilmenge X von $\operatorname{Sp}_R(A)$. Andererseits gilt für $\psi \in \operatorname{Sp}_R(A)$ und $Q \in \operatorname{Spec} R$:

$$\psi(e) = \sum_{\rho \in X} \psi(e_\rho) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \psi \in X, \\ 0, & \text{falls } \psi \notin X, \end{cases}$$

also

$$\psi \in X \iff \psi(e) \notin Q \iff e \notin \mathfrak{p}(\psi, Q) \iff \mathfrak{p}(\psi, Q) \in Z_\varphi \iff \psi \sim \varphi.$$

Folglich ist $X = \{\psi \in \operatorname{Sp}_R(A) : \psi \sim \varphi\}$ und $e = \sum_{\psi \sim \varphi} e_\psi$. □

Um die primitiven Idempotente von A_k zu bestimmen, machen wir einen Umweg über $A_P := R_P \otimes_R A$. Wir wählen wieder ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}_P$ für die P-Äquivalenzklassen von $\operatorname{Sp}_R(A)$. Mit $\mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$ bzw. $\mathrm{J}R_P$ bezeichnen wir jeweils das Jacobson-Radikal.

Lemma 1.11. *Für $\varphi \in \mathcal{R}_P$ ist die Abbildung*

$$\Phi : A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}/\mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \to R_P/P_P,\ x + \mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \mapsto \hat{\varphi}(x) + P_P$$

ein Isomorphismus von R_P-Algebren; insbesondere ist

$$A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}/\mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \cong k.$$

Beweis. Zunächst ist Φ wegen $\hat{\varphi}(\mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}) \subseteq \mathrm{J}R_P = P_P$ wohldefiniert. Sind $a \in A$ und $b \in A \setminus \mathfrak{p}(\varphi, P)$, so ist $\varphi(b) \notin P$ und

$$\hat{\varphi}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \in P_P \iff \varphi(a) \in P \iff a \in \mathfrak{p}(\varphi, P)$$
$$\iff \frac{a}{b} \in \mathfrak{p}(\varphi,P)_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} = \mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}.$$

Dies zeigt, daß Φ injektiv ist. Andererseits ist $R_P/P_P \cong R/P = k$ ein Körper und offenbar $\Phi \neq 0$. Somit ist Φ auch surjektiv und $A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}/\mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \cong R_P/P_P \cong k$. □

Satz 1.12. *Die primitiven Idempotente von A_P sind $f_\varphi := \sum_{\psi \sim_P \varphi} e_\psi$ $(\varphi \in \mathcal{R}_P)$, und für $\varphi \in \mathcal{R}_P$ gilt:*

$$A_P f_\varphi \cong A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}.$$

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{R}_P$ ist nach dem vorigen Lemma $A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}/\mathrm{J}A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} \cong k$ ein Körper, d.h. $A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$ ist eine lokale R_P-Algebra. Daher induziert der Isomorphismus

$$i := \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} i_\varphi \ :\ R_P \otimes_R A \to \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$$

aus Satz 1.6 eine Blockzerlegung

$$A_P = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} B_\varphi$$

in Blöcke B_φ von A_P. Für $\varphi \in \mathcal{R}_P$ existiert also ein primitives Idempotent f von A_P mit $A_P f = B_\varphi$, und es bleibt zu zeigen, daß $f = f_\varphi$ ist.

f ist das Einselement in B_φ, und für $\psi \in \mathrm{Supp}(\varphi, P)$ ist

$$(\hat{\psi} \circ i_\varphi)(f) = \hat{\psi}(1_{A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}}) = 1.$$

Andererseits gilt für $x \in R_P$ und $a \in A$:

$$(\hat{\psi} \circ i_\varphi)(x \otimes a) = \hat{\psi}(x\,\frac{a}{1_A}) = x\,\frac{\psi(a)}{\psi(1_A)} = x\,\psi(a) = \psi(x \otimes a),$$

also auch $(\hat{\psi} \circ i_\varphi)(y) = \psi(y)$ für alle $y \in A_P$. Da f auch ein Idempotent in A_K ist, ist $f = \sum_{\rho \in X_\varphi} e_\rho$ für eine Teilmenge X_φ von $\mathrm{Sp}_R(A)$, und es gilt:

$$1 = (\hat{\psi} \circ i_\varphi)(f) = \psi(f) = \sum_{\rho \in X_\varphi} \psi(e_\rho).$$

Daher ist $\psi \in X_\varphi$, und es folgt $\mathrm{Supp}(\varphi, P) \subseteq X_\varphi$. Wegen

$$\mathrm{Sp}_R(A) = \dot{\bigcup_{\varphi \in \mathcal{R}_P}} \mathrm{Supp}(\varphi, P) \subseteq \dot{\bigcup_{\varphi \in \mathcal{R}_P}} X_\varphi = \mathrm{Sp}_R(A)$$

gilt sogar Gleichheit, und es ist $f = \sum_{\psi \in \mathrm{Supp}(\varphi,P)} e_\psi = f_\varphi$. □

Wir kommen jetzt auf A_k zurück. Wir bezeichnen mit $\overline{\,\cdot\,}$ die Reduktion modulo P, d.h. die kanonischen Epimorphismen $\overline{\,\cdot\,} : R \to R/P = k$ und $\overline{\,\cdot\,} : R_P \to R_P/P_P \to R/P = k$ sowie die davon induzierten Epimorphismen

$$\overline{\,\cdot\,} : A \to R/P \otimes_R A = A_k$$

und

$$\overline{\,\cdot\,} : A_P = R_P \otimes_R A \to R_P/P_P \otimes_R A \to R/P \otimes_R A = A_k.$$

Außerdem sei $\overline{\varphi} : A_k \to k$ für $\varphi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ die reduzierte Abbildung, d.h. $\overline{\varphi}(x \otimes a) = x\,\overline{\varphi(a)}$ für $x \in k,\ a \in A$.

Satz 1.13. *Jedes Idempotent von A_k läßt sich auf eindeutige Weise zu einem Idempotent von A_P liften; insbesondere sind*

$$\overline{f_\varphi} = \overline{\sum_{\psi \sim_P \varphi} e_\psi} \quad (\varphi \in \mathcal{R}_P)$$

die primitiven Idempotente von A_k.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jedes primitive Idempotent in A_k von der Form $\overline{f_\varphi}$ für ein $\varphi \in \mathcal{R}_P$ ist, und daß die Idempotente $\overline{f_\varphi}$ $(\varphi \in \mathcal{R}_P)$ paarweise verschieden sind.

Da A_P kommutativ ist, sind die primitiven Idempotente von A_P paarweise orthogonal, d.h. $1 = \sum_{\varphi \in \mathcal{R}_P} f_\varphi$ ist die (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Zerlegung der Eins von A_P in primitive Idempotente. Nach Reduktion modulo P liefert dies eine Zerlegung der Eins von A_k in Idempotente $\overline{f_\varphi}$. Wegen $\overline{f_\varphi}\,\overline{f_\psi} = \overline{f_\varphi f_\psi} = \overline{0} = 0$ für $\varphi \neq \psi$ sind die Elemente $\overline{f_\varphi}$ $(\varphi \in \mathcal{R}_P)$ paarweise verschieden.

Sei $\varphi \in \mathcal{R}_P$. Um nachzuweisen, daß $\overline{f_\varphi}$ primitiv ist, betrachten wir die Zerlegung

$$A_k = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} A_k \overline{f_\varphi}.$$

Nach Lemma 1.11 und Satz 1.12 ist

$$A_k \overline{f_\varphi} = k \otimes_R A_P f_\varphi \cong k \otimes_R A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}$$

und

$$A_k \overline{f_\varphi} / \mathrm{J} A_k \overline{f_\varphi} \cong k \otimes_R (A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)} / \mathrm{J} A_{\mathfrak{p}(\varphi,P)}) \cong k.$$

Dies zeigt, daß $A_k \overline{f_\varphi}$ eine lokale k-Algebra und damit ein Block von A_k ist. Insbesondere ist $\overline{f_\varphi}$ ein primitives Idempotent von A_k. □

3. Blöcke und Halbeinfachheit

Wir führen die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt fort und nehmen weiterhin an, daß A eine geschlossene R-Algebra ist.

Da A_k eine kommutative k-Algebra ist, sind die primitiven Idempotente $\overline{f_\varphi}$ $(\varphi \in \mathcal{R}_P)$ von A_k zugleich die Blockidempotente, und die Zerlegung $1_{A_k} = \sum_{\varphi \in \mathcal{R}_P} \overline{f_\varphi}$ der Eins liefert eine Blockzerlegung

$$A_k = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}_P} A_k \overline{f_\varphi}$$

von A_k. Außerdem ist jeder Block $A_k\overline{f_\varphi}$ ein projektiv unzerlegbarer A_k-Modul. Folglich liegt genau ein einfacher A_k-Modul in $A_k\overline{f_\varphi}$, nämlich $A_k\overline{f_\varphi}/\mathrm{J}A_k\overline{f_\varphi}$. Andererseits induziert jedes $\psi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ einen 1-dimensionalen (also einfachen) A_k-Modul S_ψ durch $xs := \overline{\psi}(x)\,s$ für $x \in A_k,\ s \in S_\psi$. Wegen

$$\overline{f_\varphi}\,s = \overline{\psi}(\overline{f_\varphi})\,s = \overline{\psi(f_\varphi)}\,s = \overline{\sum_{\rho\sim_P\varphi}\psi(e_\rho)}\,s = \begin{cases} s, & \text{falls } \psi\sim_P\varphi,\\ 0, & \text{falls } \psi\not\sim_P\varphi\end{cases}$$

für $s \in S_\psi$ liegt S_ψ genau dann im Block $A_k\overline{f_\varphi}$, wenn $\psi \sim_P \varphi$ gilt. In diesem Fall ist $S_\psi \simeq A_k\overline{f_\varphi}/\mathrm{J}A_k\overline{f_\varphi}$. Es gilt also:

Lemma 1.14.

(i) S_φ $(\varphi \in \mathcal{R}_P)$ *sind (bis auf Isomorphie) die einfachen* A_k*-Moduln; insbesondere ist jeder einfache* A_k*-Modul 1-dimensional.*
(ii) *Für* $\varphi, \psi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ *gilt:* $\overline{\varphi} = \overline{\psi} \iff \varphi \sim_P \psi$.
(iii) $\mathrm{Sp}_k(A_k) = \{\overline{\varphi} : \varphi \in \mathcal{R}_P\}$

Beweis. (i) folgt aus $S_\varphi \simeq A_k\overline{f_\varphi}/\mathrm{J}A_k\overline{f_\varphi}$.

(ii) Nach der Vorbemerkung gilt für $\varphi, \psi \in \mathrm{Sp}_R(A)$:

$$\overline{\psi} = \overline{\varphi} \iff S_\psi \simeq S_\varphi \simeq A_k\overline{f_\varphi}/\mathrm{J}A_k\overline{f_\varphi} \iff \psi \sim_P \varphi.$$

(iii) Da jedes Element in $\mathrm{Sp}_R(A)$ einen 1-dimensionalen A_k-Modul induziert, folgt die Behauptung aus (i). □

Satz 1.15. *Seien* $\varphi \in \mathcal{R}_P$ *und* $A_k\overline{f_\varphi}$ *ein Block von* A_k*. Dann sind äquivalent:*

(1) $A_k\overline{f_\varphi}$ *ist einfach.*
(2) *Für* $\psi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ *gilt:* $\overline{\varphi} = \overline{\psi} \iff \varphi = \psi$.

Insbesondere ist A_k *genau dann halbeinfach, wenn für alle* $\varphi, \psi \in \mathrm{Sp}_R(A)$ *gilt:* $\overline{\varphi} = \overline{\psi} \iff \varphi = \psi$.

Beweis. Nach Satz 1.12 und Satz 1.5 ist

$$\dim_k A_k\overline{f_\varphi} = \mathrm{rk}_{R_P}\, A_P f_\varphi = \mathrm{rk}_{R_P}\, A_{\mathfrak{p}(\varphi,p)} = |\,\mathrm{Supp}(\varphi, P)|.$$

S_φ ist bis auf Isomorphie der einzige einfache A_k-Modul, der in $A_k\overline{f_\varphi}$ enthalten ist, und zwar mit Vielfachheit $\dim_k S_\varphi = 1$. Daher gilt:

$$A_k\overline{f_\varphi} \text{ einfach} \iff A_k\overline{f_\varphi} \simeq S_\varphi \iff |\,\mathrm{Supp}(\varphi, P)| = \dim_k A_k\overline{f_\varphi} = 1.$$

Aus Lemma 1.14(ii) folgt jetzt die Behauptung. □

Zum Schluß geben wir noch das Jacobson-Radikal $\mathrm{J}A_k$ von A_k an:

Satz 1.16. $\mathrm{J}A_k = \bigcap_{\varphi\in\mathcal{R}_P} \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{R}_P$. Dann gilt für den Annullator $\operatorname{Ann} S_\varphi$ von S_φ:

$$\operatorname{Ann} S_\varphi = \{x \in A_k : xs = 0 \text{ für alle } s \in S_\varphi\} = \{x \in A_k : \overline{\varphi}(x) = 0\} = \operatorname{Ker} \overline{\varphi}.$$

Da $\mathrm{J}A_k$ aus den Elementen besteht, die alle einfachen A_k-Moduln annullieren, gilt nach Lemma 1.14:

$$\mathrm{J}A_k = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{R}_P} \operatorname{Ann} S_\varphi = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{R}_P} \operatorname{Ker} \overline{\varphi}.$$

□

KAPITEL 2

Der Burnside-Ring

Seien G eine endliche Gruppe und $b^+(G)$ die Menge der Isomorphieklassen von endlichen G-Mengen. Bezeichnen wir die Isomorphieklasse einer G-Menge X mit $[X]$ und setzen für G-Mengen X, Y

$$[X] + [Y] := [X \mathbin{\dot\cup} Y],$$
$$[X] \cdot [Y] := [X \times Y],$$

so wird $b^+(G)$ zu einem kommutativen Halbring. Der Grothendieck-Ring $b(G)$ von $b^+(G)$ ist der *Burnside-Ring* von G.

Jede G-Menge X läßt sich auf eindeutige Weise in eine disjunkte Vereinigung $X = X_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} X_n$ von transitiven G-Mengen $X_1, \ldots, X_n$, nämlich den Bahnen von X unter G, zerlegen. Daher ist $b(G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit den Isomorphieklassen von transitiven G-Mengen als Basis. Für jede Untergruppe H von G wird die Menge der Linksnebenklassen G/H von G nach H durch Linksmultiplikation zu einer transitiven G-Menge. Andererseits ist jede transitive G-Menge isomorph zu G/H für eine Untergruppe H von G. Für $H, K \leq G$ sind G/H und G/K isomorph als G-Mengen genau dann, wenn H und K in G konjugiert sind. Ist also $\mathcal{S}$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Untergruppen von G, so ist $\{[G/H] : H \in \mathcal{S}\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $b(G)$.

1. Der gewöhnliche Fall

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, dessen Ganzheitsring $\mathcal{O}$ über $\mathbb{Z}$ ein Dedekindring ist (z.B. ein algebraischer Zahlkörper). Wir betrachten in diesem Abschnitt $B_{\mathcal{O}}(G) := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} b(G)$ und $B_K(G) := K \otimes_{\mathbb{Z}} b(G)$. Für $H \leq G$ bezeichnen wir mit X^H die Fixpunktmenge einer G-Menge X unter H. Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung

$$\varphi_H : B_{\mathcal{O}}(G) \to \mathcal{O},\ [X] \mapsto |X^H|,$$

die wegen $|(X \mathbin{\dot\cup} Y)^H| = |X^H| + |Y^H|$ und $|(X \times Y)^H| = |X^H| \cdot |Y^H|$ für G-Mengen X, Y ein Ringhomomorphismus ist und *Markenhomomorphismus* genannt wird. Wir bezeichnen die Fortsetzung $B_K(G) \to K$ von φ_H ebenfalls mit φ_H.

Lemma 2.1. *Seien $H, I \leq G$. Dann gilt:*

(i) $\varphi_H([G/I]) = |\{gI \in G/I : g^{-1}Hg \leq I\}|$; *insbes. ist* $\varphi_H([G/H]) = |\mathrm{N}_G(H) : H|$.
(ii) $\varphi_H([G/I]) \neq 0 \iff H \lesssim_G I$.
(iii) $\varphi_H = \varphi_I \iff H \sim_G I$.
(iv) $[G/H] \cdot [G/I] = \sum\limits_{HgI \in H\backslash G/I} [G/H \cap {}^gI]$.

(v) *Für $x \in B_{\mathcal{O}}(G)$ existieren $\alpha_I \in \mathcal{O}$ mit*

$$[G/H] \cdot x = \varphi_H(x)\,[G/H] + \sum_{\substack{I \in \mathcal{S} \\ I \lnsim H}} \alpha_I\,[G/I]$$

Beweis. (i)-(iii) Dies folgt leicht aus der Definition der Markenhomomorphismen.
(iv), (v) Siehe z.B. [**8**, §80]. □

Satz 2.2.

(i) *$B_{\mathcal{O}}(G)$ ist eine geschlossene $\mathcal{O}$-Algebra mit* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{O}}(B_{\mathcal{O}}(H)) = \{\varphi_H : H \in \mathcal{S}\}$.
(ii) (L. Solomon [**21**]) *Die Abbildung*

$$\varphi := \bigoplus_{H \in \mathcal{S}} \varphi_H \ : \ B_K(G) \to \bigoplus_{H \in \mathcal{S}} K$$

ist ein Isomorphismus von K-Algebren; insbesondere ist $B_K(G)$ halbeinfach.

Beweis. Nach Lemma 2.1(iii) haben wir mindestens $|\mathcal{S}| = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, b(G) = \dim_K B_K(G)$ verschiedene Markenhomomorphismen. Daher folgen die Behauptungen aus Satz 1.7. □

Die primitiven Idempotente e_H ($H \in \mathcal{S}$) von $B_K(G)$ sind also die Urbilder der kanonischen primitiven Idempotente von $K^{|\mathcal{S}|}$ unter φ, d.h. sie werden charakterisiert durch

$$\varphi_I(e_H) = \begin{cases} 1, & \text{falls } H \sim_G I, \\ 0, & \text{falls } H \not\sim_G I. \end{cases}$$

Lemma 2.3. *Seien $H \in \mathcal{S}$, $I \leq G$ und $x \in B_K(G)$. Dann gilt:*

(i) *$x \cdot e_H = \varphi_H(x)\,e_H$.*
(ii) *Ist H nicht subkonjugiert zu I, so ist $[G/I]\,e_H = 0$.*

Beweis. (i) Für alle $I \in \mathcal{S}$ ist

$$\varphi_I(x \cdot e_H) = \varphi_I(x)\,\varphi_I(e_H) = \varphi_H(x)\,\delta_{IH} = \varphi_H(x)\,\varphi_I(e_H) = \varphi_I(\varphi_H(x)\,e_H).$$

Aus der Injektivität von φ folgt die Behauptung.
(ii) Im Fall $H \not\lesssim_G I$ folgt aus (i) und Lemma 2.1(ii):

$$[G/I]\,e_H = \varphi_H([G/I])\,e_H = 0 \cdot e_H = 0.$$

□

Mit Hilfe der Möbius-Inversion kann e_H für $H \in \mathcal{S}$ sogar explizit angegeben werden. Sei dazu $S(G)$ der Untergruppenverband von G. $S(G)$ bildet bzgl. der Inklusion eine partiell geordnete Menge (poset), und als solche besitzt $S(G)$ eine Möbius-Funktion $\mu : S(G) \times S(G) \to \mathbb{Z}$, die durch die Eigenschaft

$$\sum_{H \leq L \leq I} \mu(H, L) = \begin{cases} 1, & \text{falls } H = I, \\ 0, & \text{falls } H \neq I, \end{cases}$$

für $H, I \leq G$ definiert ist. Dann gilt:

Satz 2.4 (D. Gluck). *Für $H \in \mathcal{S}$ ist*

$$e_H = \frac{1}{|\mathrm{N}_G(H)|} \sum_{I \leq H} |I|\, \mu(I,H)\, [G/I].$$

Insbesondere ist $e_H \in \sum_{I \lesssim_G H} K\, [G/I]$.

Beweis. Siehe [**10**]. □

Zuletzt sollen noch die Restriktions- und Induktionsabbildung auf Burnside-Ringen definiert werden. Sei dazu eine Untergruppe H von G gegeben. Dann wird jede G-Menge X zu einer H-Menge X_H, indem man die G-Operation auf H einschränkt. Diese Restriktion von G-Mengen induziert eine Restriktionsabbildung

$$\mathrm{Res}_H^G : b(G) \to b(H),\ [X] \mapsto [X_H]$$

von Burnside-Ringen. Offenbar ist Res_H^G ein Ringhomomorphismus.

Sei umgekehrt Y eine H-Menge. Dann ist auch $G \times Y$ eine H-Menge, wenn man ${}^h(g,y) := (gh^{-1}, {}^h y)$ für $h \in H,\ g \in G,\ y \in Y$ definiert, und die Menge $G \times_H Y$ aller H-Bahnen $[g,y]$ $(g \in G,\ y \in Y)$ von $G \times Y$ wird durch ${}^{g'}[g,y] := [g'g, y]$ für $g, g' \in G,\ y \in Y$ zu einer G-Menge. Auf diese Weise erhält man eine Induktionsabbildung

$$\mathrm{Ind}_H^G : b(H) \to b(G),\ [Y] \mapsto [G \times_H Y]$$

von Burnside-Ringen. Ind_H^G ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln, aber im allgemeinen kein Ringhomomorphismus.

Man rechnet leicht nach, daß folgendes richtig ist:

Lemma 2.5. *Für $H, I \leq G$ und $L \leq H$ gilt:*

(i) $\mathrm{Res}_H^G([G/I]) = \displaystyle\sum_{HgI \in H\backslash G/I} [H/H \cap {}^g I]$.

(ii) $\mathrm{Ind}_H^G([H/L]) = [G/L]$.

(iii) $\mathrm{Res}_H^G(e_I) = \displaystyle\sum_{\substack{L \in \mathcal{S}(H) \\ L \sim_G I}} e_{H,L}$.

(iv) $\mathrm{Ind}_H^G(e_{H,L}) = |\mathrm{N}_G(L) : \mathrm{N}_H(L)|\, e_L$.

Dabei sind $e_{H,L}$ $(L \in \mathcal{S}(H))$ die primitiven Idempotente von $B_K(H)$.

Analog hat man auch Restriktions- und Induktionsabbildungen für $B_{\mathcal{O}}(G)$ und $B_K(G)$. Wir bezeichnen diese Abbildungen ebenfalls mit Res_H^G bzw. Ind_H^G.

2. Der modulare Fall

Seien p eine Primzahl und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}$ mit $p \in \mathfrak{p}$. Der Restklassenkörper $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ ist also ein Körper der Charakteristik p. Wir wollen die modulare Burnside-Algebra $B_k(G) := k \otimes_{\mathbb{Z}} b(G)$ untersuchen. Wir bezeichnen mit $\overline{\cdot}$ die Reduktion modulo $\mathfrak{p}$, d.h. den kanonischen Epimorphismus $\mathcal{O} \to k$ sowie den davon induzierten Epimorphismus $B_{\mathcal{O}}(G) \to B_k(G)$. Für $H \leq G$ sei außerdem $\overline{\varphi_H} : B_k(G) \to k$ die Abbildung, die man erhält, wenn man φ_H modulo $\mathfrak{p}$ reduziert.

Sei $\mathcal{S}$ wieder ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Untergruppen von G. Für $H \leq G$ sei $\mathrm{O}^p(H)$ das *p-Residuum* von H, nämlich der (eindeutig bestimmte) kleinste Normalteiler N von H, so daß H/N eine p-Gruppe ist. Zwei Untergruppen H und I von G nennen wir *p-konjugiert*, falls $\mathrm{O}^p(H)$ und $\mathrm{O}^p(I)$ in G konjugiert sind. Wir nennen eine Untergruppe H von G *p-perfekt*, falls $\mathrm{O}^p(H) = H$ ist, und setzen

$$\mathcal{P} := \{H \in \mathcal{S} : H \text{ ist } p\text{-perfekt}\}.$$

$\mathcal{P}$ ist also ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von p-perfekten Untergruppen von G. Für $H \in \mathcal{P}$ definieren wir außerdem

$$\mathcal{S}_H := \{I \in \mathcal{S} : \mathrm{O}^p(I) \sim_G H\}.$$

Meinen wir diesselben Mengen in Bezug auf eine Untergruppe U von G statt auf G selbst, so schreiben wir $\mathcal{S}(U)$, $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{S}_H(U)$.

Für jedes $I \in \mathcal{S}$ ist $\mathrm{O}^p(I)$ wegen $\mathrm{O}^p(\mathrm{O}^p(I)) = \mathrm{O}^p(I)$ eine p-perfekte Untergruppe von G. Daher ist $I \in \mathcal{S}$ in einer der Mengen $\mathcal{S}_H$ $(H \in \mathcal{P})$ enthalten. Seien andererseits $H, H' \in \mathcal{P}$ mit $\mathcal{S}_H \cap \mathcal{S}_{H'} \neq \emptyset$, etwa $I \in \mathcal{S}_H \cap \mathcal{S}_{H'}$. Dann ist $H \sim_G \mathrm{O}^p(I) \sim_G H'$, also $H = H'$. Dies zeigt, daß wir eine disjunkte Zerlegung

$$\mathcal{S} = \dot{\bigcup_{H \in \mathcal{P}}} \mathcal{S}_H$$

haben.

Die Aussagen der beiden folgenden Lemmata dürften wohlbekannt sein:

Lemma 2.6. *Seien $H \leq G$ und $N \trianglelefteq H$, so daß H/N eine p-Gruppe ist. Dann gilt für $x \in b(G)$:*

$$\varphi_H(x) \equiv \varphi_N(x) \pmod{p}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x = [X]$ für eine endliche G-Menge X. Offenbar ist $X^H \subseteq X^N$, und H/N operiert auf X^N mit X^H als Fixpunktmenge. Daher zerfällt $X^N \setminus X^H$ in nichttriviale Bahnen von p-Potenzlänge, und es ist

$$\varphi_H([X]) = |X^H| \equiv |X^N| = \varphi_N([X]) \pmod{p}. \qquad \square$$

Lemma 2.7. *Sei $H \in \mathcal{P}$. Dann gilt:*

(i) *H ist das bzgl. Subkonjugation kleinste Element in $\mathcal{S}_H$.*
(ii) *Es existiert ein $S \in \mathcal{S}_H$ mit der Eigenschaft $p \nmid |\mathrm{N}_G(S) : S|$.*
(iii) *S ist das bzgl. Subkonjugation größte Element in $\mathcal{S}_H$; insbesondere ist $S \in \mathcal{S}_H$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. (i) Offensichtlich ist $H \in \mathcal{S}_H$, und für alle $I \in \mathcal{S}_H$ gilt $H \sim_G \mathrm{O}^p(I) \leq I$.

(ii) Wir wählen eine Untergruppe S von $\mathrm{N}_G(H)$, so daß S/H eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{N}_G(H)/H$ ist. Wegen $H \trianglelefteq S$ ist $\mathrm{O}^p(S) \leq H$. Andererseits ist wegen $\mathrm{O}^p(S) \trianglelefteq S$ auch $\mathrm{O}^p(S) \trianglelefteq H$ und $H/\mathrm{O}^p(S)$ eine p-Gruppe, also $\mathrm{O}^p(H) \leq \mathrm{O}^p(S)$. Dies zeigt, daß $\mathrm{O}^p(S) = \mathrm{O}^p(H) = H$ ist. Ersetzt man jetzt S durch eine geeignete konjugierte Untergruppe von G, so ist $S \in \mathcal{S}_H$.
Da $H = \mathrm{O}^p(S)$ charakteristisch in S ist, ist $H \trianglelefteq \mathrm{N}_G(S)$. Folglich ist $\mathrm{N}_G(S) \leq \mathrm{N}_G(H)$, also $p \nmid |\mathrm{N}_G(S) : S|$ nach der Wahl von S.

(iii) Sei $I \in \mathcal{S}_H$. Dann gilt nach Lemma 2.6:

$$\varphi_I([G/S]) \equiv \varphi_H([G/S]) \equiv \varphi_S([G/S]) = |\mathrm{N}_G(S) : S| \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Nach Lemma 2.1(ii) ist daher $I \lesssim_G S$. □

Für $H \in \mathcal{P}$ bezeichnen wir ab jetzt mit S_H das eindeutig bestimmte Element aus $\mathcal{S}_H$ mit der Eigenschaft $p \nmid |\mathrm{N}_G(S_H) : S_H|$. Dabei wollen wir ohne Einschränkung annehmen, daß H in S_H enthalten ist. Nach dem obigen Lemma ist sowohl $\mathcal{P}$ als auch $\{S_H : H \in \mathcal{P}\}$ ein Repräsentantensystem für die p-Konjugationsklassen von Untergruppen von G.

Satz 2.8 (A. Dress [**9**]). *Für $H, I \in \mathcal{S}$ gilt:*

$$\overline{\varphi_H} = \overline{\varphi_I} \iff \mathrm{O}^p(H) \sim_G \mathrm{O}^p(I).$$

Beweis. $\Leftarrow$: Im Fall $\mathrm{O}^p(H) \sim_G \mathrm{O}^p(I)$ gilt nach Lemma 2.6:

$$\varphi_H \equiv \varphi_{\mathrm{O}^p(H)} = \varphi_{\mathrm{O}^p(I)} \equiv \varphi_I \pmod{\mathfrak{p}}.$$

$\Rightarrow$: Seien $\overline{\varphi_H} = \overline{\varphi_I}$ und $S \leq \mathrm{N}_G(\mathrm{O}^p(H))$, $T \leq \mathrm{N}_G(\mathrm{O}^p(I))$, so daß $S/\mathrm{O}^p(H)$ und $T/\mathrm{O}^p(I)$ p-Sylowgruppen von $\mathrm{N}_G(\mathrm{O}^p(H))/\mathrm{O}^p(H)$ bzw. $\mathrm{N}_G(\mathrm{O}^p(I))/\mathrm{O}^p(I)$ sind. Nach Lemma 2.7(ii) ist $\mathrm{O}^p(S) = \mathrm{O}^p(H)$ und $\mathrm{O}^p(T) = \mathrm{O}^p(I)$, also

$$\varphi_S \equiv \varphi_H \equiv \varphi_I \equiv \varphi_T \pmod{\mathfrak{p}}.$$

nach dem ersten Teil des Beweises. Außerdem ist $p \nmid |\mathrm{N}_G(S) : S|$ und daher

$$\varphi_T([G/S]) \equiv \varphi_S([G/S]) = |\mathrm{N}_G(S) : S| \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Insbesondere ist $\varphi_T([G/S]) \neq 0$, also $T \lesssim_G S$ nach Lemma 2.1(ii). Aus Symmetriegründen ist $S \sim_G T$ und

$$\mathrm{O}^p(H) = \mathrm{O}^p(S) \sim_G \mathrm{O}^p(T) = \mathrm{O}^p(I).$$

□

Satz 2.9 (T. Yoshida [**24**]). *Für $H \in \mathcal{P}$ sei*

$$f_H := \sum_{I \in \mathcal{S}_H} e_I.$$

Dann ist $\{\overline{f_H} : H \in \mathcal{P}\}$ die Menge der primitiven Idempotente von $B_k(G)$.

Beweis. Wende Satz 1.13 auf die geschlossene $\mathcal{O}$-Algebra $B_{\mathcal{O}}(G)$ an. □

Wir erhalten also auf diese Weise eine Zerlegung von $B_k(G)$ in Blöcke:

$$B_k(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{P}} B_k(G)\overline{f_H}.$$

Für $H \in \mathcal{P}$ setzen wir zur Abkürzung $B_H := B_k(G)\overline{f_H}$.

Satz 2.10. *Sei $H \in \mathcal{P}$.*

(i) *Der Block B_H ist genau dann eine einfache k-Algebra, wenn $S_H = H$ ist.*
(ii) (E. Jacobson [**15**]) *$B_k(G)$ ist genau dann halbeinfach, wenn $p \nmid |G|$ ist.*

Beweis. (i) Nach Satz 1.15 gilt:

$$B_H \text{ einfach} \iff |\mathcal{S}_H| = 1 \iff S_H = H.$$

(ii) $B_k(G)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder Block B_H einfach ist. Im Fall $p \nmid |G|$ ist die Bedingung $S_H = H$ offenbar für jede Untergruppe H von G erfüllt. Im Fall $p \mid |G|$ dagegen ist der zur trivialen Untergruppe gehörige Block B_1 nicht einfach, da $S_1 \neq 1$ eine p-Sylowgruppe von G ist. □

Im folgenden schreiben wir auch $\sim$ und $\lesssim$ statt $\sim_G$ bzw. $\lesssim_G$, falls keine Verwechslung zu befürchten ist. Mit Hilfe der Multiplikationsregel 2.1(iv) sieht man leicht, daß

$$b'(G,H) := \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{S} \\ H \not\lesssim I}} \mathbb{Z}\,[G/I]$$

für $H \leq G$ ein Ideal in $b(G)$ ist. Analog definieren wir $B'_{\mathcal{O}}(G,H)$, $B'_K(G,H)$ und $B'_k(G,H)$.

Lemma 2.11. *Für $I \in \mathcal{S}_H$ ist $[G/I] \equiv [G/I]\,\overline{f_H} \pmod{B'_k(G,H)}$.*

Beweis. Sei $I \in \mathcal{S}_H$. Dann ist

$$[G/I] = [G/I] \cdot 1 = [G/I] \sum_{H' \in \mathcal{P}} \overline{f_{H'}} = \sum_{H' \in \mathcal{P}} [G/I]\,\overline{f_{H'}}.$$

Im Fall $H' \not\lesssim I$ ist auch $L \not\lesssim I$ für $L \in \mathcal{S}_{H'}$ und daher nach Lemma 2.3

$$[G/I]\, f_{H'} = \sum_{L \in \mathcal{S}_{H'}} [G/I]\, e_L = 0.$$

Folglich ist auch $[G/I]\,\overline{f_{H'}} = 0$, also

$$[G/I] = \sum_{\substack{H' \in \mathcal{P} \\ H' \lesssim I}} [G/I]\,\overline{f_{H'}}$$

Sei jetzt $H' \in \mathcal{P} \setminus \{H\}$ mit $H' \lesssim I$. Dann ist $H' = \mathrm{O}^p(H') \lesssim \mathrm{O}^p(I) \sim H$. Für $L \in \mathcal{S}_{H'}$ ist also $H \not\lesssim L$, denn sonst wäre $H' \lesssim H = \mathrm{O}^p(H) \lesssim \mathrm{O}^p(L) = H'$ und daher $H' \sim H$.

Folglich ist

$$\begin{aligned}[G/I]\, f_{H'} &= \sum_{L \in \mathcal{S}_{H'}} [G/I]\, e_L = \sum_{L \in \mathcal{S}_{H'}} \varphi_L([G/I])\, e_L \\ &\in \sum_{L \in \mathcal{S}_{H'}} \sum_{L' \lesssim L} K[G/L'] \subseteq B'_K(G,H)\end{aligned}$$

und $[G/I]\, \overline{f_{H'}} \in B'_k(G,H)$. Wir erhalten also

$$[G/I] \equiv [G/I]\, \overline{f_H} \pmod{B'_k(G,H)}.$$

□

Lemma 2.12. *Die Elemente $[G/I]\, \overline{f_H}$ $(I \in \mathcal{S}_H)$ bilden eine k-Basis von B_H.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma sind die Elemente $[G/I]\, \overline{f_H} + B'_k(G,H)$ $(I \in \mathcal{S}_H)$ in $B_k(G)/B'_k(G,H)$ linear unabhängig. Folglich sind auch $[G/I]\, \overline{f_H}$ $(I \in \mathcal{S}_H)$ in $B_k(G)$ linear unabhängig. Wegen $|\mathcal{S}_H| = \dim_k B_H$ bilden diese Elemente eine Basis von B_H. □

Lemma 2.13. *Sei $H := \mathrm{O}^p(G)$. Dann ist die k-lineare Abbildung*

$$\alpha : B_k(G/H) \to B_k(G)\overline{f_H},$$

die durch

$$[(G/H)/(I/H)] \mapsto [G/I]\, \overline{f_H}$$

für $I \in \mathcal{S}_H$ definiert ist, ein Isomorphismus von k-Algebren.

Beweis. Offenbar ist α ein Homomorphismus von k-Algebren. Nach dem vorigen Lemma ist α surjektiv und wegen $\dim_k B_k(G/H) = |\mathcal{S}_H| = \dim_k B_k(G)\overline{f_H}$ auch injektiv. □

Als nächstes geben wir an, wie sich das Idempotent $\overline{f_H}$ von $B_k(G)$ unter der Restriktion verhält. Ist U eine Untergruppe von G, so bezeichnen wir die primitiven Idempotente von $B_K(U)$ und $B_k(U)$ zur Unterscheidung mit $e_{U,L}$ $(L \in \mathcal{S}(U))$ bzw. $\overline{f_{U,L}}$ $(L \in \mathcal{P}(U))$.

Lemma 2.14. *Für eine Untergruppe U von G mit $H \leq U$ gilt:*

$$\mathrm{Res}^G_U(\overline{f_H}) = \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(U) \\ L \sim_G H}} \overline{f_{U,L}}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{S} \cap U \subseteq \mathcal{S}(U)$. Dann gilt nach Lemma 2.5:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^G_U(f_H) &= \sum_{I \in \mathcal{S}_H} \mathrm{Res}^G_U(e_I) = \sum_{I \in \mathcal{S}_H} \sum_{\substack{L \in \mathcal{S}(U) \\ L \sim_G I}} e_{U,L} \\ &= \sum_{\substack{L \in \mathcal{S}(U) \\ L \in \mathcal{S}_H}} e_{U,L} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(U) \\ L \sim_G H}} f_{U,L}.\end{aligned}$$

□

Zuletzt kommen wir noch auf stabile Elemente zu sprechen. Seien S eine Untergruppe von G und $g \in G$. Wir nennen ein Element $x \in B_k(S)$ *g-stabil*, falls

$$\mathrm{Res}^{S}_{S \cap {}^gS}(x) = \mathrm{Res}^{{}^gS}_{S \cap {}^gS}({}^gx)$$

gilt. Dabei ist ${}^gx$ definiert durch ${}^g[S/L] := [{}^gS/{}^gL]$ für $L \leq S$. Das Element x heißt *G-stabil*, falls es g-stabil für jedes $g \in G$ ist. Die Menge der G-stabilen Elemente von $B_k(S)$ bezeichnen wir mit $B_k(S)^G$. Offenbar ist $B_k(S)^G$ eine k-Unteralgebra von $B_k(S)$.

Jetzt können wir den folgenden Transfer-Satz formulieren:

Satz 2.15 (T. Yoshida)**.** *Sei $H \in \mathcal{P}$. Dann gilt:*

(i) *Die Abbildung*

$$B_k(G)\overline{f_H} \to B_k(S_H)^G\,\overline{f_{S_H,H}},\ x \mapsto \mathrm{Res}^G_{S_H}(x)$$

ist ein Isomorphismus von k-Algebren.

(ii) $B_k(S_H)^G\,\overline{f_{S_H,H}} = B_k(S_H)^{\mathrm{N}_G(H)}\,\overline{f_{S_H,H}}$.

(iii) $B_k(G)\overline{f_H} \cong B_k(\mathrm{N}_G(H))\overline{f_{\mathrm{N}_G(H),H}}$.

Beweis. Siehe [**25**, Lemma 4.1, Cor. 4.2]. □

3. Das Radikal

Seien $H \in \mathcal{P}$ und $\mathrm{J}B_H$ das Jacobson-Radikal des Blocks $B_H = B_k(G)\overline{f_H}$ von $B_k(G)$. Im letzten Abschnitt haben wir bereits gesehen, daß genau dann $\mathrm{J}B_H = 0$ ist, wenn $\mathcal{S}_H = \{H\}$ gilt. Im allgemeinen sieht das Jacobson-Radikal von B_H wie folgt aus:

Satz 2.16. *Es ist*

$$\mathrm{J}B_H = \bigoplus_{I \in \mathcal{S}_H \setminus \{S_H\}} k[G/I]\,\overline{f_H}.$$

Beweis. Sei $J := \bigoplus_{I \in \mathcal{S}_H \setminus \{S_H\}} k[G/I]\,\overline{f_H}$. Da B_H eine lokale k-Algebra ist, genügt es zu zeigen, daß J ein Ideal in B_H mit $\dim_k B_H/J = 1$ ist.

Seien $I \in \mathcal{S}_H \setminus \{S_H\}$ und $L \leq G$. Nach Lemma 2.1(v) gilt

$$[G/I]\,\overline{f_H} \cdot [G/L]\,\overline{f_H} = \sum_{IgL \in I\backslash G/L} [G/I \cap {}^gL]\,\overline{f_H}.$$

Im Fall $H \lnsim I \cap {}^gL$ zeigt man wie im Beweis von Lemma 2.11, daß $[G/I \cap {}^gL]\,\overline{f_H} = 0$ ist. Daher ist

$$[G/I]\,\overline{f_H} \cdot [G/L]\,\overline{f_H} \in \bigoplus_{\substack{M \in \mathcal{S}_H \\ M \lnsim I}} k\,[G/M]\,\overline{f_H},$$

und es folgt, daß J ein Ideal in B_H ist. Da nach Lemma 2.12 die Elemente $[G/I]\,\overline{f_H}$ ($I \in \mathcal{S}_H$) linear abhängig sind, ist

$$\dim_k J = |\mathcal{S}_H| \Leftrightarrow 1 = \dim_k B_H \Leftrightarrow 1.$$

□

Jetzt folgt leicht:

Satz 2.17. *Bis auf Isomorphie existiert genau ein einfacher B_H-Modul M. M ist ein 1-dimensionaler Modul, und die Basis $[G/I]\,\overline{f_H}$ $(I \in \mathcal{S}_H)$ von B_H operiert auf M durch Multiplikation mit $|\mathrm{N}_G(S_H) : S_H|$ für $I = S_H$ bzw. mit 0 für $I \neq S_H$.*

Beweis. Da $M := B_H/\mathrm{J}B_H = k\,([G/S_H]\,\overline{f_H} + \mathrm{J}B_H)$ 1-dimensional ist, ist M bis auf Isomorphie der einzige B_H-Modul. Die restlichen Behauptungen folgen aus

$$[G/I]\,\overline{f_H} \in \mathrm{J}B_H \subseteq \operatorname{Ann} M$$

für $I \in \mathcal{S}_H \setminus \{S_H\}$ und

$$([G/S_H]\,\overline{f_H})^2 = \sum_{I \in \mathcal{S}_H} \alpha_I\,[G/I]\,\overline{f_H}$$

mit

$$\alpha_{S_H} = |\{S_H g S_H \in S_H \backslash G/S_H : S_H \cap {}^g S_H \sim_G S_H\}| = |\mathrm{N}_G(S_H) : S_H|.$$

□

Wir bestimmen jetzt die höheren Radikalpotenzen $\mathrm{J}^n B_H := (\mathrm{J}B_H)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, um die Loewy-Länge von B_H abschätzen zu können.

Satz 2.18. *Sei $|S_H/H| = p^r$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathrm{J}^n B_H \subseteq \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{S}_H \\ |I/H| \leq p^{r-n}}} k\,[G/I]\,\overline{f_H};$$

insbesondere ist $\mathrm{J}^{r+1} B_H = 0$.

Beweis. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 2.16. Sei also $n > 1$ und die Behauptung für $n - 1$ schon bewiesen, d.h.

$$\mathrm{J}^{n-1} B_H \subseteq \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{S}_H \\ |I/H| \leq p^{r-n+1}}} k\,[G/I]\,\overline{f_H}.$$

Dann genügt es zu zeigen, daß für $I \in \mathcal{S}_H$ mit $|I/H| \leq p^{r-n+1}$ und $L \in \mathcal{S}_H \setminus \{S_H\}$ gilt:

$$[G/I] \cdot [G/L]\,\overline{f_H} \in \bigoplus_{\substack{M \in \mathcal{S}_H \\ M \lnsim I}} k\,[G/M]\,\overline{f_H}.$$

Nach Lemma 2.1 ist

$$[G/I] \cdot [G/L]\,\overline{f_H} = \sum_{IgL \in I \backslash G/L} [G/I \cap {}^g L]\,\overline{f_H}.$$

Für $g \in G$ ist $I \cap {}^g L \sim I \Leftrightarrow I \leq {}^g L$, und in diesem Fall ist $IgL = I\,{}^g L g = {}^g L g = gL$. Daher ist

$$\begin{aligned} |\{IgL \in I \backslash G/L : I \cap {}^g L \sim I\}| &= |\{gL \in G/L : I \leq {}^g L\}| \\ &= \varphi_I([G/L]) \equiv \varphi_L([G/L]) \\ &= |\mathrm{N}_G(L) : L| \equiv 0 \pmod p \end{aligned}$$

nach Lemma 2.7, und die Behauptung folgt. □

Korollar 2.19. *Ist S eine p-Sylowgruppe von G und $|S| = p^r$, so gilt für die Loewy-Länge $l(B_k(G))$ von $B_k(G)$:*

$$l(B_k(G)) \leq r + 1.$$

Beweis. Für $H \in \mathcal{P}$ ist $|S_H/H| \leq r$, also $\mathrm{J}^{r+1}B_H = 0$ nach Satz 2.18. Daher ist

$$\mathrm{J}^{r+1}B_k(G) = \mathrm{J}^{r+1}\bigoplus_{H\in\mathcal{P}} B_H = \bigoplus_{H\in\mathcal{P}} \mathrm{J}^{r+1}B_H = 0.$$

□

4. p-Gruppen

Beschränken wir uns auf p-Gruppen, so können wir die Loewy-Länge der modularen Burnside-Algebra auch nach unten abschätzen. In diesem Fall gilt:

Satz 2.20. *Seien S eine p-Gruppe, $\Phi := \Phi(S)$ die Frattini-Gruppe von S und $|S/\Phi| = p^r$. Dann gilt für die Loewy-Länge $l(B_k(S))$ von $B_k(S)$:*

(i) $l(B_k(S)) \geq r + 1$.
(ii) *Ist S abelsch, so ist $l(B_k(S)) = r + 1$.*

Beweis. (i) Wir zeigen

$$\mathrm{J}^n B_k(S) \supseteq \sum_{\substack{\Phi\leq I\leq S\\ |I/\Phi|\leq p^{r-n}}} k\,[S/I]$$

durch Induktion nach n. Nach Satz 2.16 ist

$$\mathrm{J}B_k(S) = \sum_{I<S} k\,[S/I] \supseteq \sum_{\substack{\Phi\leq I\leq S\\ |I/\Phi|\leq p^{r-1}}} k\,[S/I].$$

Sei also $n > 1$ und die Behauptung für $n \Leftrightarrow 1$ schon bewiesen. Ist $I < S$, so gilt für jede maximale Untergruppe M von S wegen $M \trianglelefteq S$:

$$\begin{aligned}[S/I]\cdot[S/M] &= \sum_{IsM\in I\backslash S/M} [S/I\cap {}^sM] = \sum_{IMs\in IM\backslash S} [S/I\cap M]\\ &= |S:IM|\,[S/I\cap M] = \begin{cases}[S/I\cap M], & \text{falls } I\not\leq M,\\ 0, & \text{falls } I\leq M.\end{cases}\end{aligned}$$

Fassen wir S/Φ als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum auf, so ist klar, daß sich jede Untergruppe I von S mit $\Phi \leq I$ und $|I/\Phi| = p^{r-n}$ als Durchschnitt einer Untergruppe L von S mit $\Phi \leq L$ und

$|L/\Phi| = p^{r-n+1}$ und einer maximalen Untergruppe von S darstellen läßt. Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^n B_k(S) &= \mathrm{J}^{n-1} B_k(S) \cdot \mathrm{J} B_k(S) \\
&\supseteq \Bigg(\sum_{\substack{\Phi \leq I \leq S \\ |I/\Phi| \leq p^{r-n+1}}} k\,[S/I] \Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{\substack{M < S \\ |S:M| = p}} k\,[S/M] \Bigg) \\
&= \sum_{\substack{\Phi \leq I \leq S \\ |I/\Phi| \leq p^{r-n+1}}} \sum_{\substack{M < S \\ |S:M| = p}} k\,[S/I] \cdot [S/M] \\
&= \sum_{\substack{\Phi \leq I \leq S \\ |I/\Phi| \leq p^{r-n+1}}} \sum_{\substack{M < S \\ |S:M| = p \\ I \not\leq M}} k\,[S/I \cap M] \\
&= \sum_{\substack{\Phi \leq I \leq S \\ |I/\Phi| \leq p^{r-n}}} k\,[S/I].
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $0 \neq [S/\Phi] \in \mathrm{J}^r B_k(S)$ und folglich $l(B_k(S)) \geq r+1$.

(ii) Sei jetzt S abelsch. Wir zeigen durch Induktion, daß dann

$$\mathrm{J}^n B_k(S) \subseteq \sum_{\substack{I \leq S \\ |I\Phi/\Phi| \leq p^{r-n}}} k\,[S/I]$$

für $1 \leq n \leq r$ gilt. Für $n = 1$ ist dies wieder klar wegen

$$\mathrm{J} B_k(S) = \sum_{I < S} k\,[S/I] = \sum_{\substack{I \leq S \\ |I\Phi/\Phi| \leq p^{r-1}}} k\,[S/I].$$

Sei also $n > 1$. Da S abelsch ist, gilt für $I, L \leq S$:

$$[S/I] \cdot [S/L] = |S : IL|\,[S/I \cap L] = \begin{cases} [S/I \cap L], & \text{falls } IL = S, \\ 0, & \text{falls } IL < S. \end{cases}$$

Im Fall $IL = S$ aber kann eine maximale Untergruppe M von S, die L enthält, nicht auch I enthalten. Folglich ist $I\Phi \cap L\Phi \leq I\Phi \cap M < I\Phi$ und

$$|(I \cap L)\Phi/\Phi| = |(I\Phi \cap L\Phi)/\Phi| < |I\Phi/\Phi|.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^n B_k(S) &= \mathrm{J}^{n-1} B_k(S) \cdot \mathrm{J} B_k(S) \\
&\subseteq \Big(\sum_{\substack{I \leq S \\ |I\Phi/\Phi| \leq p^{r-n+1}}} k\,[S/I] \Big) \cdot \Big(\sum_{L<S} k\,[S/L] \Big) \\
&= \sum_{\substack{I \leq S \\ |I\Phi/\Phi| \leq p^{r-n+1}}} \sum_{L<S} k\,[S/I] \cdot [S/L] \\
&= \sum_{\substack{I \leq S \\ |I\Phi/\Phi| \leq p^{r-n+1}}} \sum_{\substack{L<S \\ IL=S}} k\,[S/I \cap L] \\
&\subseteq \sum_{\substack{I \leq S \\ |I\Phi/\Phi| \leq p^{r-n}}} k\,[S/I].
\end{aligned}$$

Für $n = r$ ergibt sich also

$$\mathrm{J}^r B_k(S) \subseteq \sum_{I \leq \Phi} k\,[S/I].$$

Da für $I \leq \Phi$ und $L < S$ stets $IL < S$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^{r+1} B_k(S) &= \mathrm{J}^r B_k(S) \cdot \mathrm{J} B_k(S) \\
&\subseteq \sum_{I \leq \Phi} \sum_{L<S} [S/I] \cdot [S/L] = 0
\end{aligned}$$

und $l(B_k(S)) \leq r+1$. □

Beispiel. Ist S eine elementarabelsche p-Gruppe der Ordnung p^r, so können wir im Beweis von Satz 2.20(ii) die Inklusionszeichen offenbar auch durch Gleichheitszeichen ersetzen, d.h. es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{J}^n B_k(S) = \sum_{\substack{I \leq S \\ |I| \leq p^{r-n}}} k\,[S/I].$$

Bemerkung. In Satz 2.20(ii) genügt statt der Forderung, daß S abelsch ist, auch die folgende Eigenschaft von S: Für $I, L \leq S$ mit $I \cap L < I$ gilt $(I \cap L)\Phi(S) < I\Phi(S)$ oder $I \cap L \leq \Phi(S)$. Für nichtabelsche p-Gruppen ist dies im allgemeinen nicht erfüllt. Sei z.B. S die Erweiterung einer elementarabelschen p-Gruppe $E = \langle x, y, z \rangle$ der Ordnung 8 mit einer zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$ der Ordnung 2, wobei $a^2 = x$ ist und a auf E durch ${}^a x = x$, ${}^a y = y$, ${}^a z = yz$ operiert. Dann ist $\Phi(S) = \langle x, y \rangle$, und für $I := \langle x, z \rangle$, $L := \langle xy, z \rangle$ gilt:

$$(I \cap L)\Phi(S) = \langle z \rangle \cdot \Phi(S) = E = I\Phi(S).$$

Mit Hilfe des letzten Satzes kann man die Abschätzung der Loewy-Länge $l(B_k(G)\overline{f_H})$ eines Blocks von $B_k(G)$ aus Satz 2.18 in manchen Fällen verbessern:

Korollar 2.21. *Sei $H \in \mathcal{P}$. Ist S_H/H abelsch und $|(S_H/H) : \Phi(S_H/H)| = p^r$, so ist $l(B_k(G)\overline{f_H}) \leq r+1$.*

Beweis. Aus Satz 2.15, Lemma 2.13 und Satz 2.20(ii) folgt:

$$\begin{aligned} l(B_k(G)\overline{f_H}) &= l(B_k(S_H)^G\,\overline{f_{S_H,H}}) \leq l(B_k(S_H)\,\overline{f_{S_H,H}}) \\ &= l(B_k(S_H/H)) \leq r+1. \end{aligned}$$

□

5. Symmetrie

In diesem Abschnitt wollen wir der Frage nachgehen, ob $B_k(G)$ bzw. die Blöcke von $B_k(G)$ symmetrische k-Algebren sind.

Eine endlich-dimensionale k-Algebra A heißt *symmetrisch*, wenn eine k-lineare Abbildung $\lambda : A \to k$ existiert mit:

(i) Für alle $a, b \in A$ gilt $\lambda(ab) = \lambda(ba)$.
(ii) Ist I ein Ideal in A mit $I \subseteq \operatorname{Ker}\lambda$, so ist $I = 0$.

Die Bedingung (ii) ist äquivalent dazu, daß die Abbildung $\beta : A \times A \to k,\ (a,b) \mapsto \lambda(ab)$ eine nichtausgeartete Bilinearform ist.

Wir werden sehen, daß $B_k(G)$ im allgemeinen nicht symmetrisch ist. Dazu werden wir das folgende einfache Lemma verwenden:

Lemma 2.22. *Sei A eine endlich-dimensionale kommutative k-Algebra mit $\dim_K A/\mathrm{J}A = 1$. Dann ist A genau dann symmetrisch, wenn $\dim_k \operatorname{Soc} A = 1$ ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Ist A symmetrisch, so ist $A/\mathrm{J}A \cong \operatorname{Soc} A$ (siehe z.B. [**8**, Prop. 9.12]).

$\Leftarrow$: Sei $\dim_k \operatorname{Soc} A = 1$. Wir wählen eine k-Basis $b_1, \ldots, b_n$ von A mit $\operatorname{Soc} A = k \cdot b_1$ und definieren die lineare Abbildung

$$\lambda : A \to k,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \mapsto \alpha_1.$$

Ist $I \neq 0$ ein Ideal in A, so enthält I einen einfachen A-Modul S. Wegen $\dim_k \operatorname{Soc} A = 1$ ist $S = \operatorname{Soc} A \not\subseteq \operatorname{Ker}\lambda$. Folglich ist auch $I \not\subseteq \operatorname{Ker}\lambda$. Dies zeigt, daß A zusammen mit λ eine symmetrische k-Algebra ist. □

Sei $H \in \mathcal{P}$ und der Block $B_H := B_k(G)\overline{f_H}$ von $B_k(G)$ gegeben. Dann gilt:

Lemma 2.23. $[G/H]\,\overline{f_H} \in \operatorname{Soc} B_H$.

Beweis. Für $I \in \mathcal{S}_H$ gilt:

$$[G/H]\,\overline{f_H} \cdot [G/I]\,\overline{f_H} = \sum_{HgI \in H\backslash G/I} [G/H \cap {}^gI]\,\overline{f_H}.$$

Im Fall $H \leq {}^gI$ ist $[G/H \cap {}^gI]\,\overline{f_H} = [G/H]\,\overline{f_H}$, und im Fall $H \not\leq {}^gI$ ist $H \cap {}^gI < H$, also $[G/H \cap {}^gI]\,\overline{f_H} = 0$ nach Lemma 2.3. Dies zeigt, daß $k\,[G/H]\,\overline{f_H}$ ein 1-dimensionales (also einfaches) Ideal in B_H ist. Daher ist $k\,[G/H]\,\overline{f_H} \subseteq \operatorname{Soc} B_H$. □

Nach Satz 2.16 ist $\dim B_H/\mathrm{J}B_H = 1$. Um nachzuweisen, daß B_H nicht symmetrisch ist, müssen wir also ein zweites, von $[G/H]\,\overline{f_H}$ linear unabhängiges Element in $\operatorname{Soc} B_H$ finden. Wir werden dazu den Isomorphismus $B_k(G)\overline{f_H} \cong B_k(S_H)^G\overline{f_{S_H,H}}$ aus Satz 2.15 verwenden, um uns auf p-Gruppen zurückziehen zu können.

Zuerst benötigen wir aber eine Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes. Für eine endliche Gruppe G, eine Untergruppe U von G und $i \in \mathbb{N}_0$ definieren wir dazu

$$S_i(G) := \{H \leq G : |H| = p^i\}$$

und

$$n_i(G,U) := |\{H \in S_i(G) : U \leq H\}|.$$

Erst kürzlich haben wir erfahren, daß der folgende Satz auch in [**23**] zu finden ist.

Satz 2.24. *Sei G eine Gruppe der Ordnung $p^r m$, wobei $p \nmid m$. Dann gilt für $i \in \{0,\dots,r\}$ und jede p-Untergruppe U von G mit $|U| \leq p^i$:*

$$n_i(G,U) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach $r - i$. Sei zuerst $i = r$. Ist S eine p-Sylowgruppe von G, so ist $\{gSg^{-1} : g\mathrm{N}_G(S) \in G/\mathrm{N}_G(S)\}$ die Menge aller p-Sylowgruppen von G, und man erhält mit Hilfe von Lemma 2.6:

$$\begin{aligned} n_r(G,U) &= |\{g\mathrm{N}_G(S) \in G/\mathrm{N}_G(S) : U \leq gSg^{-1}\}| \\ &= \frac{|S|}{|\mathrm{N}_G(S)|}\,|\{gS \in G/S : U \leq gSg^{-1}\}| \\ &= \frac{|S|}{|\mathrm{N}_G(S)|}\,\varphi_U([G/S]) \equiv \frac{|S|}{|\mathrm{N}_G(S)|}\,\varphi_1([G/S]) \\ &\equiv \frac{|S|}{|\mathrm{N}_G(S)|}\,\varphi_S([G/S]) = \frac{|S|}{|\mathrm{N}_G(S)|}\,|\mathrm{N}_G(S) : S| = 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Sei also $i < r$. Wir nehmen zunächst an, daß wir die Behauptung im Fall, daß G eine p-Gruppe ist, schon gezeigt haben. Dann können wir $n_i(S,U) \equiv 1 \pmod{p}$ für jede p-Sylowgruppe S von G, die U enthält, annehmen, und es gilt:

$$\begin{aligned} n_i(G,U) &= \sum_{\substack{H \in S_i(G)\\ U \leq H}} 1 \equiv \sum_{\substack{H \in S_i(G)\\ U \leq H}} n_r(G,H) = \sum_{\substack{H \in S_i(G)\\ U \leq H}} |\{S \in S_r(G) : H \leq S\}| \\ &= |\{(S,H) \in S_r(G) \times S_i(G) : U \leq H \leq S\}| \\ &= \sum_{\substack{S \in S_r(G)\\ U \leq S}} |\{H \in S_i(S) : U \leq H\}| = \sum_{\substack{S \in S_r(G)\\ U \leq S}} n_i(S,U) \\ &\equiv \sum_{\substack{S \in S_r(G)\\ U \leq S}} 1 = n_r(G,U) \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Sei also ab jetzt G eine p-Gruppe. Dann ist jede Untergruppe $M \in S_{r-1}(G)$ normal in G, und es gilt:

$$U \leq M \iff N := \langle gUg^{-1} : g \in G\rangle \leq M.$$

Daher ist $n_{r-1}(G,U) = n_{r-1}(G,N)$, und wegen $N \trianglelefteq G$ können wir zur Faktorgruppe G/N übergehen, d.h. $n_{r-1}(G,N)$ ist gleich der Anzahl der Untergruppen von G/N vom Index p. Nach Sylow ist diese Anzahl kongruent zu 1 modulo p, und wir erhalten die Behauptung für $i = r \Leftrightarrow 1$.

Sei schließlich $i < r \Leftrightarrow 1$. Nach Induktion können wir jetzt $n_i(M,U) \equiv 1 \pmod{p}$ für alle $M \in S_{r-1}(G)$ mit $U \le M$ annehmen. Daher ist

$$\begin{aligned} n_i(G,U) &= \sum_{\substack{H \in S_i(G) \\ U \le H}} 1 \equiv \sum_{\substack{H \in S_i(G) \\ U \le H}} n_{r-1}(G,H) \\ &= |\{(M,H) \in S_{r-1}(G) \times S_i(G) : U \le H \le M\}| \\ &= \sum_{\substack{M \in S_{r-1}(G) \\ U \le M}} n_i(M,U) \equiv \sum_{\substack{M \in S_{r-1}(G) \\ U \le M}} 1 \\ &= n_{r-1}(G,U) \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.25. *Seien S eine p-Gruppe und $V < U < S$. Dann ist die Anzahl der Untergruppen H von S mit $UH = S$ und $U \cap H = V$ durch p teilbar.*

Beweis. Sei $|S| = p^r$ und $|U : V| = p^i$. Wir argumentieren durch Induktion nach i. Für jede Untergruppe H von S mit $UH = S$ und $U \cap H = V$ gilt

$$|S| = |UH| = \frac{|U| \cdot |H|}{|U \cap H|} = |U : V| \cdot |H|,$$

also $|H| = p^{r-i}$. Im Fall $i = 1$ ist H daher eine maximale Untergruppe von S, und nach dem vorigen Satz gilt:

$$\begin{aligned} &|\{H \le S : UH = S,\ U \cap H = V\}| \\ &\qquad = |\{H \in S_{r-1}(S) : U \not\le H,\ V \le H\}| \\ &\qquad = |\{H \in S_{r-1}(S) : V \le H\}| \Leftrightarrow |\{H \in S_{r-1}(S) : U \le H\}| \\ &\qquad \equiv 1 \Leftrightarrow 1 = 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Seien also $i > 1$ und M eine maximale Untergruppe von S. Existiert ein $H \le M$ mit $UH = S$ und $U \cap H = V$, so ist offensichtlich $U \not\le M$ und $V \le M$. Daher ist $|(U \cap M) : V| < |U : V|$, und nach Induktion gilt

$$|\{H \le M : (U \cap M)H = M,\ (U \cap M) \cap H = V\}| \equiv 0 \pmod{p}.$$

Für jede weitere Untergruppe H' von M ist außerdem $U \cap H' = V \iff (U \cap M) \cap H' = V$, und in diesem Fall ist $UH' = S \iff |H'| = p^{r-i} \iff (U \cap M)H' = M$. Nach dem vorigen Satz folgt deshalb

$$
\begin{aligned}
|\{H \le S : UH = S,\ U \cap H = V\}| \\
&= \sum_{\substack{H<S\\ UH=S\\ U\cap H=V}} 1 \equiv \sum_{\substack{H<S\\ UH=S\\ U\cap H=V}} |\{M \in S_{r-1}(S) : H \le M\}| \\
&= \sum_{M\in S_{r-1}(S)} |\{H \le M : UH = S,\ U \cap H = V\}| \\
&= \sum_{\substack{M\in S_{r-1}(S)\\ U\not\le M,\ V\le M}} |\{H \le M : UH = S,\ U \cap H = V\}| \\
&= \sum_{\substack{M\in S_{r-1}(S)\\ U\not\le M,\ V\le M}} |\{H \le M : (U\cap M)H = M,\ (U \cap M) \cap H = V\}| \\
&\equiv 0 \pmod{p}.
\end{aligned}
$$
□

Satz 2.26. *Seien S eine p-Gruppe der Ordnung p^r und $i \in \{1, \ldots, r \Leftrightarrow 1\}$. Sind alle Untergruppen der Ordnung p^i normal in S (z.B. wenn $i = r \Leftrightarrow 1$ oder S abelsch ist), so ist*

$$s_i := \sum_{\substack{I\le S\\ |I|=p^i}} [S/I] \in \operatorname{Soc} B_k(S).$$

Beweis. Wir werden zeigen, daß $\mathrm{J}B_k(S)$ von s_i annulliert wird. Nach Satz 2.16 ist $\mathrm{J}B_k(S) = \sum_{L<S} k\,[S/L]$. Seien also $L < S$ und I eine Untergruppe der Ordnung p^i von S. Wegen $I \trianglelefteq S$ ist

$$
\begin{aligned}
[S/L]\cdot[S/I] &= \sum_{LsI\in L\backslash S/I} [S/L \cap {}^sI] = \sum_{LIs\in LI\backslash S} [S/L\cap I] \\
&= |S:LI|\,[S/L\cap I] = \begin{cases} [S/L\cap I], & \text{falls } LI = S, \\ 0, & \text{falls } LI < S. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$[S/L]\cdot s_i = \sum_{\substack{I\le S,\ |I|=p^i\\ LI=S}} [S/L\cap I] = 0$$

nach Korollar 2.25. Es folgt $s_i \in \operatorname{Ann} \mathrm{J}B_k(S) = \operatorname{Soc} B_k(S)$. □

Bemerkung. H. Krämer hat in [**18**] gezeigt, daß für eine p-Gruppe S gilt:

$$\sum_{\substack{H\le S\\ |H|=p}} [S/H] \in \operatorname{Soc} B_k(S).$$

Dieses Ergebnis findet sich auch bei W. Gustafson [**12**]. Er gibt auch die Konsequenz an: $B_k(S)$ ist eine symmetrische Algebra genau dann, wenn $p^2 \nmid |S|$ ist. Dies wollen wir für Blöcke von $B_k(G)$ für eine beliebige endliche Gruppe G verallgemeinern.

Satz 2.27. *Der Block B_H ist genau dann eine symmetrische k-Algebra, wenn $p^2 \nmid |S_H : H|$ ist.*

Beweis. Im Fall $p^2 \nmid |S_H : H|$ ist $\mathcal{S}_H = \{H\}$ oder $\mathcal{S}_H = \{S_H, H\}$, also $\dim_k B_H \leq 2$. Daher ist B_H entweder halbeinfach und damit symmetrisch, oder es ist $\dim_k \operatorname{Soc} B_H = 1$, und B_H ist ebenfalls symmetrisch nach Lemma 2.22.

Sei jetzt $p^2 \mid |S_H : H|$. Wir betrachten den Block $B_{S_H,H} := B_k(S_H)\overline{f_{S_H,H}}$ von $B_k(S_H)$. Nach Satz 2.15(i) ist B_H als k-Algebra isomorph zu den G-stabilen Elementen $B^G_{S_H,H}$ von $B_{S_H,H}$. Nach Lemma 2.22 genügt es also zu zeigen, daß $\dim_k \operatorname{Soc} B^G_{S_H,H} \geq 2$ ist.

Das Element

$$x := [S_H/H]\,\overline{f_{S_H,H}}$$

liegt in $\operatorname{Soc} B_{S_H,H}$ nach Lemma 2.23. Ein zweites Sockelelement von $B_{S_H,H}$ finden wir auf folgende Weise: Nach Lemma 2.13 ist durch $[(S_H/H)/(I/H)] \mapsto [S_H/I]\,\overline{f_{S_H,H}}$ ein Isomorphismus $B_k(S_H/H) \to B_{S_H,H}$ gegeben. Wenden wir also Satz 2.26 auf die p-Gruppe S_H/H an, so erhalten wir ein Element

$$\sum_{\substack{H \leq I \leq S_H \\ |S_H:I|=p}} [(S_H/H)/(I/H)] \in \operatorname{Soc} B_k(S/H)$$

und damit auch ein Element

$$y := \sum_{\substack{H \leq I \leq S_H \\ |S_H:I|=p}} [S_H/I]\,\overline{f_{S_H,H}} \in \operatorname{Soc} B_{S_H,H}.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.12 sieht man leicht, daß x und y linear unabhängig sind. Es bleibt noch zu zeigen, daß die beiden Elemente G-stabil sind. Denn dann sind

$$x, y \in (\operatorname{Soc} B_{S_H,H}) \cap B^G_{S_H,H} \subseteq \operatorname{Soc} B^G_{S_H,H}$$

und $\dim_k \operatorname{Soc} B^G_{S_H,H} \geq 2$.

Nach Satz 2.15(ii) genügt es nachzuweisen, daß x und y g-stabil für $g \in \mathrm{N}_G(H)$ sind. Sei daher ein $g \in \mathrm{N}_G(H)$ gegeben. Kürzen wir $S_H \cap {}^gS_H$ durch D ab, so ist also zu zeigen:

$$\operatorname{Res}^{S_H}_D(x) = \operatorname{Res}^{{}^gS_H}_D({}^gx)$$

und

$$\operatorname{Res}^{S_H}_D(y) = \operatorname{Res}^{{}^gS_H}_D({}^gy).$$

Nach Lemma 2.5 ist zunächst

$$\operatorname{Res}^{S_H}_D(\overline{f_{S_H,H}}) = \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(D) \\ L \sim_{S_H} H}} \overline{f_{D,L}} = \overline{f_{D,H}}$$

und analog

$$\operatorname{Res}^{{}^gS_H}_D({}^g\overline{f_{S_H,H}}) = \overline{f_{D,H}}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_D^{S_H}(x) &= \operatorname{Res}_D^{S_H}([S_H/H]) \cdot \operatorname{Res}_D^{S_H}(\overline{f_{S_H,H}}) \\ &= \sum_{DsH \in D\backslash S_H/H} [D/D \cap {}^sH]\,\overline{f_{D,H}} \\ &= \sum_{DHs \in DH\backslash S_H} [D/D \cap H]\,\overline{f_{D,H}} \\ &= |S_H : D|\,[D/H]\,\overline{f_{D,H}}\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}_D^{{}^gS_H}({}^gx) = |{}^gS_H : D|\,[D/H]\,\overline{f_{D,H}}.$$

Nun ist aber

$$p \nmid |S_H : D| \iff D = S_H \iff S_H = {}^gS_H \iff D = {}^gS_H \iff p \nmid |{}^gS_H : D|.$$

In diesem Fall gilt also

$$\operatorname{Res}_D^{S_H}(x) = [D/H]\,\overline{f_{D,H}} = \operatorname{Res}_D^{{}^gS_H}({}^gx),$$

und anderenfalls ist

$$\operatorname{Res}_D^{S_H}(x) = 0 = \operatorname{Res}_D^{{}^gS_H}({}^gx).$$

Dies zeigt, daß x ein g-stabiles Element ist.

Jedes $I \leq S_H$ mit $H \leq I$ und $|S_H : I| = p$ ist normal in S_H. Daher gilt für y:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_D^{S_H}(y) &= \sum_{\substack{H \leq I \leq S_H \\ |S_H:I|=p}} \operatorname{Res}_D^{S_H}([S_H/I])\,\overline{f_{D,H}} \\ &= \sum_{\substack{H \leq I \leq S_H \\ |S_H:I|=p}} \sum_{DsI \in D\backslash S_H/I} [D/D \cap {}^sI]\,\overline{f_{D,H}} \\ &= \sum_{\substack{H \leq I \leq S_H \\ |S_H:I|=p}} |S_H : DI|\,[D/D \cap I]\,\overline{f_{D,H}}.\end{aligned}$$

Für ein $I \leq S_H$ mit $H \leq I$ und $|S_H : I| = p$ gilt aber

$$p \nmid |S_H : DI| \iff DI = S_H \iff D \not\leq I.$$

Nach Korollar 2.25 ist daher

$$\operatorname{Res}_D^{S_H}(y) = \sum_{\substack{H \leq I \leq S_H \\ |S_H:I|=p \\ D \not\leq I}} [D/D \cap I]\,\overline{f_{D,H}} = 0.$$

Analog ist $\operatorname{Res}_D^{{}^gS_H}({}^gy) = 0$, und es folgt, daß auch y ein g-stabiles Element ist. □

Korollar 2.28 (W. Gustafson [**12**]). *$B_k(G)$ ist genau dann symmetrisch, wenn $p^2 \nmid |G|$ ist.*

Beweis. $B_k(G)$ ist genau dann symmetrisch, wenn jeder Block von $B_k(G)$ symmetrisch ist. Daher folgt die Behauptung aus Satz 2.27. □

KAPITEL 3

Der Charakterring

Seien G eine endliche Gruppe und $\mathrm{R}(G)$ der *Charakterring* von G, d.h. der Grothendieck-Ring des Halbrings aller komplexen Charaktere von G. Da sich jeder Charakter in eindeutiger Weise als Summe von irreduziblen Charakteren schreiben läßt, ist $\mathrm{R}(G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit der Menge $\mathrm{Irr}(G)$ der irreduziblen Charaktere von G als Basis. Ist χ ein Charakter von G, so bezeichnen wir mit χ auch das entsprechende Element in $\mathrm{R}(G)$. Für jeden Koeffizientenring $\mathcal{O}$ setzen wir $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G) := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G)$.

1. Der gewöhnliche Fall

Seien m der Exponent von G und K ein Körper der Charakteristik 0, der die m-ten Einheitswurzeln enthält und dessen Ganzheitsring $\mathcal{O}$ über $\mathbb{Z}$ ein Dedekindring ist (z.B. der m-te Kreisteilungkörper über $\mathbb{Q}$). Nach Brauer ist K ein Zerfällungskörper von G. Insbesondere liegen also sämtliche Charakterwerte in $\mathcal{O}$. Für $g \in G$ können wir daher eine Abbildung

$$\sigma_g : \mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G) \to \mathcal{O},\ \chi \mapsto \chi(g)$$

definieren, die offensichtlich ein Ringhomomorphismus ist, d.h. σ_g ist ein Species von $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$. Die Fortsetzung $\mathrm{R}_K(G) \to K,\ \chi \mapsto \chi(g)$ bezeichnen wir ebenso mit σ_g.

Satz 3.1. *Für $g, h \in G$ gilt: $\sigma_g = \sigma_h \iff g \sim_G h$.*

Beweis. $\Leftarrow$: Dies folgt aus der Tatsache, daß Charaktere Klassenfunktionen sind.

$\Rightarrow$: Im Fall $\sigma_g = \sigma_h$ ist $\chi(g) = \chi(h)$ für alle irreduziblen Charaktere von G. Da $\mathrm{Irr}(G)$ eine Basis des Vektorraums aller Klassenfunktionen von G nach $\mathbb{C}$ ist, sind g und h in G konjugiert. □

Für den Rest des Kapitels wählen wir ein Repräsentantensystem $\mathcal{C}$ für die Konjugationsklassen von G.

Satz 3.2.

(i) $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$ *ist eine geschlossene $\mathcal{O}$-Algebra mit* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{O}}(\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)) = \{\sigma_g : g \in \mathcal{C}\}$.

(ii) *Die Abbildung*

$$\sigma := \bigoplus_{g \in \mathcal{C}} \sigma_g \ :\ \mathrm{R}_K(G) \to \bigoplus_{g \in \mathcal{C}} K$$

ist ein Isomorphismus von K-Algebren; insbesondere ist $\mathrm{R}_K(G)$ *ist halbeinfach.*

(iii) *Die primitiven Idempotente von* $\mathrm{R}_K(G)$ *sind*

$$e_g = \frac{1}{|\mathrm{C}_G(g)|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g^{-1})\, \chi \qquad (g \in \mathcal{C}).$$

Beweis. (i) Satz 3.1 zeigt, daß die Species σ_g $(g \in \mathcal{C})$ paarweise verschieden sind. Wegen $|\mathcal{C}| = |\operatorname{Irr}(G)| = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G) = \dim_K \mathrm{R}_K(G)$ folgt daher aus Satz 1.7, daß $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$ eine geschlossene $\mathcal{O}$-Algebra und $\{\sigma_g : g \in \mathcal{C}\}$ die vollständige Menge aller Species von $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$ ist.

(ii) Dies folgt aus (i) und Satz 1.7.

(iii) Nach (ii) sind die primitiven Idempotente die Urbilder der kanonischen primitiven Idempotente ε_g $(g \in \mathcal{C})$ in $\bigoplus_{g \in \mathcal{C}} K$ unter σ. Sei also $g \in \mathcal{C}$ und $e_g := \sigma^{-1}(\varepsilon_g)$. Für $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ gilt:

$$\sigma(\chi) = \sum_{h \in \mathcal{C}} \sigma_h(\chi)\, \varepsilon_h = \sum_{h \in \mathcal{C}} \chi(h)\, \varepsilon_h.$$

Mit Hilfe der zweiten Orthogonalitätsrelation erhält man daher für $g \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g^{-1})\, \sigma(\chi) &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g^{-1}) \sum_{h \in \mathcal{C}} \chi(h)\, \varepsilon_h \\ &= \sum_{h \in \mathcal{C}} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(h)\, \chi(g^{-1})\, \varepsilon_h = |\mathrm{C}_G(g)|\, \varepsilon_g.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

2. Der modulare Fall

Sei p eine Primzahl. Da $\mathcal{O}$ eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$ ist, existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}$ mit $p \in \mathfrak{p}$, und wir erhalten einen Restklassenkörper $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ der Charakteristik p. Unser Ziel ist es, den modularen Charakterring $\mathrm{R}_k(G) := k \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G) = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G)$ zu untersuchen. Mit $\overline{\cdot}$ bezeichnen wir die Reduktion modulo $\mathfrak{p}$, d.h. den kanonischen Epimorphismus $\mathcal{O} \to k$ sowie den davon induzierten Epimorphismus $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G) \to \mathrm{R}_k(G)$. Für $g \in G$ sei außerdem $\overline{\sigma_g} : \mathrm{R}_k(G) \to k$ die Abbildung, die man erhält, wenn man σ_g modulo $\mathfrak{p}$ reduziert.

Wir setzen

$$\mathcal{C}_{p'} := \mathcal{C} \cap G_{p'}.$$

Dann ist $\mathcal{C}_{p'}$ ein Repräsentantensystem für die p'-Konjugationsklassen bzw. für die p'-Sektionen von G. Für $g \in \mathcal{C}_{p'}$ sei außerdem

$$\mathcal{C}_g := \{h \in \mathcal{C} : h_{p'} \sim_G g\}.$$

$\mathcal{C}$ ist also die disjunkte Vereinigung der Mengen $\mathcal{C}_g$ $(g \in \mathcal{C}_{p'})$.

Bemerkung 3.3. Für jeden kG-Modul M sei $\chi_M : G \to k$ der Charakter von M. Bekanntlich ist χ_M konstant auf jeder p'-Sektion von G, und die Anzahl der p'-Sektionen ist gleich der Anzahl der Isomorphieklassen von einfachen kG-Moduln. Da die Charaktere χ_S (S einfacher kG-Modul) linear unabhängig sind (siehe z.B. [**8**, Thm. 17.3]), bilden sie eine Basis des k-Vektorraums der Funktionen $G \to k$, die konstant auf allen p'-Sektionen sind.

Sei m der Exponent von G. Die m-ten Einheitswurzeln von K liegen bereits in $\mathcal{O}$, und die Reduktion modulo $\mathfrak{p}$ liefert eine Bijektion zwischen den $m_{p'}$-ten Einheitswurzeln von K und k. Da für jeden kG-Modul M die Werte von χ_M Summen von $m_{p'}$-ten Einheitswurzeln sind, können wir den Brauercharakter $\varphi_M : G_{p'} \to \mathcal{O}$ durch Liften der Einheitswurzeln definieren. Für $g \in G_{p'}$ gilt also $\overline{\varphi_M(g)} = \chi_M(g)$. Mit $\mathrm{IBr}(G)$ bezeichnen wir die Menge der irreduziblen Brauercharaktere, d.h. der Brauercharaktere φ_S der einfachen kG-Moduln S. Aus der linearen Unabhängigkeit der Charaktere χ_S folgt, daß die Matrix $(\overline{\varphi_S(g)})_{S,g}$ regulär ist, wobei S die Isomorphieklassen von einfachen kG-Moduln und g die Menge $\mathcal{C}_{p'}$ durchläuft. Insbesondere ist auch die *Brauercharaktertafel* $(\varphi_S(g))_{S,g}$ eine reguläre Matrix.

Lemma 3.4. *Für $g, h \in G$ gilt:*

$$\overline{\sigma_g} = \overline{\sigma_h} \iff g_{p'} \sim_G h_{p'}.$$

Beweis. $\Leftarrow$: Seien $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $g, h \in G$. Wir zerlegen die Einschränkung

$$\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} \chi = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

in irreduzible Charaktere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\langle g \rangle$. Für $i = 1, \ldots, n$ ist $\lambda_i(g_p)$ eine $|\langle g_p \rangle|$-te Einheitswurzel in $\mathcal{O}$ und $\overline{\lambda_i(g_p)}$ eine $|\langle g_p \rangle|$-te Einheitswurzel in k. Wegen $\operatorname{char} k = p$ ist daher $\overline{\lambda_i(g_p)} = 1_k$, d.h. $\lambda_i(g_p) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Aus der Linearität von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ folgt jetzt

$$\begin{aligned}\chi(g) &= \big(\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} \chi\big)(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(g_p g_{p'}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(g_p)\lambda_i(g_{p'}) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i(g_{p'}) = \chi(g_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}}.\end{aligned}$$

Analog ist $\chi(h) \equiv \chi(h_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}}$. Im Fall $g_{p'} \sim_G h_{p'}$ ist daher

$$\sigma_g(\chi) = \chi(g) \equiv \chi(g_{p'}) = \chi(h_{p'}) \equiv \chi(h) = \sigma_h(\chi) \pmod{\mathfrak{p}}$$

für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und damit auch für alle $\chi \in \mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$.

$\Rightarrow$: Sei $\sigma_g \equiv \sigma_h \pmod{\mathfrak{p}}$. Wie im ersten Teil des Beweises gezeigt, ist dann $\chi(g_{p'}) \equiv \chi(g) \equiv \chi(h) \equiv \chi(h_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Da jeder Brauercharakter von G die Einschränkung eines verallgemeinerten gewöhnlichen Charakters von G auf $G_{p'}$ ist, ist $\varphi(g_{p'}) \equiv \varphi(h_{p'}) \pmod{\mathfrak{p}}$ für jeden Brauercharakter φ von G. Nach Bemerkung 3.3 ist die modulo $\mathfrak{p}$ reduzierte Brauercharaktertafel eine reguläre Matrix über k. Folglich ist $g_{p'} \sim_G h_{p'}$. $\square$

Nach Lemma 1.4 sind also zwei Species σ_g und σ_h von $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$ genau dann $\mathfrak{p}$-äquivalent, wenn g und h in derselben p'-Sektion liegen. Daher ist $\{\sigma_g : g \in \mathcal{C}_{p'}\}$ ein Repräsentantensystem für die $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklassen von Species von $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$, und zusammen mit Satz 1.13 erhält man:

Satz 3.5. *Für $g \in \mathcal{C}_{p'}$ sei*

$$f_g := \sum_{h \in \mathcal{C}_g} e_h.$$

Dann ist $\{\overline{f_g} : g \in \mathcal{C}_{p'}\}$ die Menge der primitiven Idempotente von $\mathrm{R}_k(G)$.

Wir erhalten auf diese Weise also eine Zerlegung

$$\mathrm{R}_k(G) = \bigoplus_{g \in \mathcal{C}_{p'}} R_k(G)\overline{f_g}$$

von $\mathrm{R}_k(G)$ in Blöcke $\mathrm{R}_k(G)\overline{f_g}$.

Satz 3.6. *Sei $g \in \mathcal{C}_{p'}$. Der Block $\mathrm{R}_k(G)\overline{f_g}$ ist genau dann eine einfache k-Algebra, wenn $p \nmid |\mathrm{C}_G(g)|$ ist. Insbesondere ist $\mathrm{R}_k(G)$ genau dann halbeinfach, wenn $p \nmid |G|$ ist.*

Beweis. Nach Satz 1.15 gilt:

$$\mathrm{R}_k(G)\overline{f_g} \text{ einfach } \iff |\mathcal{C}_g| = 1.$$

Ist $h = h_p h_{p'}$ ein von g verschiedenes Element in $\mathcal{C}_g$, so ist $h_{p'} \sim_G g$ und $1 \neq h_p \in \mathrm{C}_G(h_{p'})$. Daher ist $p \mid |\mathrm{C}_G(h_{p'})| = |\mathrm{C}_G(g)|$.
Sei umgekehrt $p \mid |\mathrm{C}_G(g)|$ und h ein Element der Ordnung p in $\mathrm{C}_G(g)$. Dann ist $(gh)_{p'} = g$, und gh oder ein zu gh konjugiertes Element liegt in $\mathcal{C}_g$. □

Bemerkung. Im Fall $p \mid |G|$ ist z.B. die Reduktion $\overline{\rho}$ des regulären Carakters ρ von G ein nichttriviales Element im Radikal von $\mathrm{R}_k(G)$, denn für $g \in G$ gilt:

$$\overline{\sigma_g}(\overline{\rho}) = \overline{\rho(g)} = \begin{cases} |G|\,1_k = 0, & \text{falls } g = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Lemma 1.16 ist daher $\overline{\rho} \in \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker} \overline{\sigma_g} = \mathrm{JR}_k(G)$.

Satz 3.7 (S. D. Berman [**4**])**.** $\mathrm{R}(G)$ *besitzt keine nichttrivialen Idempotente.*

Beweis. Mit $\mathrm{R}(G)$ würde auch $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$ nichttriviale Idempotente besitzen. Daher genügt es nach Satz 1.10 zu zeigen, daß die Species σ_g ($g \in \mathcal{C}$) von $\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(G)$ eine Zusammenhangsklasse im Sinne von Definition 1.8 bilden. Dazu reicht nach Satz 1.4 aus, für jedes $g \in G$ Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ in $\mathcal{O}$ und Elemente $g_0 = 1, g_1, \dots, g_n = g \in G$ mit $\sigma_{g_{i-1}} \equiv \sigma_{g_i} \pmod{\mathfrak{p}_i}$ für $i = 1, \dots, n$ anzugeben.

Seien $\{p_1, \dots, p_n\}$ die Primteiler von $|G|$, und für $i = 1, \dots, n$ sei $\mathfrak{p}_i$ ein Ideal in $\mathcal{O}$ mit $p_i \in \mathfrak{p}_i$. Dann erfüllen die Elemente

$$g_i := \prod_{j=0}^{i} g_{p_j} \qquad (i = 0, \dots, n)$$

die gewünschte Bedingung; denn g_{i-1} ist der p_i'-Faktor von g_i und damit $\sigma_{g_{i-1}} \equiv \sigma_{g_i} \pmod{\mathfrak{p}_i}$ nach Lemma 3.4. □

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Unterschied zwischen dem modularen Charakterring $\mathrm{R}_k(G)$ und dem modularen Burnside-Ring $B_k(G)$. Während $B_k(G)$ fast nie symmetrisch ist (siehe Korollar 2.28), gilt:

Satz 3.8. $\mathrm{R}_k(G)$ *ist eine symmetrische k-Algebra.*

Beweis. Sei $(\cdot|\cdot)$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathrm{R}(G)$. Wir zeigen, daß durch

$$\overline{\chi} \mapsto (1_G|\chi)\, 1_k$$

für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ eine Linearform $\lambda : \mathrm{R}_k(G) \to k$ definiert wird, die $\mathrm{R}_k(G)$ zu einer symmetrischen k-Algebra macht. Dazu weisen wir nach, daß die zu λ gehörige Bilinearform

$$\beta : \mathrm{R}_k(G) \times \mathrm{R}_k(G) \to k,\ (x,y) \mapsto \lambda(xy)$$

nichtausgeartet ist. Seien also $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$. Dann ist $\beta(\overline{\chi}, \overline{\psi}) = (1_G, \chi\psi)\, 1_k$ und

$$\begin{aligned}(1_G|\chi\psi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1_G(g)\, \chi(g^{-1})\, \psi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \hat{\chi}(g)\, \psi(g^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \hat{\chi} = \psi, \\ 0, & \text{falls } \hat{\chi} \neq \psi, \end{cases}\end{aligned}$$

wobei $\hat{\chi}$ der zu χ duale Charakter ist. Da mit χ auch $\hat{\chi}$ irreduzibel ist, ist die Strukturmatrix von β bzgl. der Basis $\mathrm{Irr}(G)$ eine Permutationsmatrix. Folglich ist β unabhängig von der Charakteristik von k nichtausgeartet. □

3. Ein Induktionssatz

Wir wollen in diesem Abschnitt ein Analogon zu den bekannten Induktionssätzen von Artin und Brauer beweisen. Dazu benötigen wir die folgende

Definition 3.9. Eine endliche Gruppe H heißt

(i) *p-quasielementar*, falls H einen zyklischen p'-Normalteiler C besitzt, so daß H/C eine p-Gruppe ist.
(ii) *p-elementar*, falls H das direkte Produkt einer zyklischen (p'-)Gruppe und einer p-Gruppe ist.
(iii) *elementar*, wenn H q-elementar für eine Primzahl q ist.

Wir wählen Repräsentantensysteme $\mathcal{Z}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_p$ und $\mathcal{E}'_p$ für die Konjugationsklassen von zyklischen, elementaren, p-elementaren bzw. p-quasielementaren Untergruppen von G.

Satz 3.10.

(i) (E. Artin [**2**]) $\mathrm{R}_{\mathbb{Q}}(G) = \sum_{H \in \mathcal{Z}} \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{R}_{\mathbb{Q}}(H)$.
(ii) (R. Brauer [**5**]) $\mathrm{R}(G) = \sum_{H \in \mathcal{E}} \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{R}(H)$.

Diese Induktionssätze bleiben natürlich auch nach Skalarerweiterung gültig. Z.B. hat man einen Artinschen Induktionssatz für $\mathrm{R}_K(G)$ und einen Brauerschen Induktionssatz für $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G)$ für jeden kommutativen Koeffizientenring A, insbesondere also auch für $\mathrm{R}_k(G)$.

Bemerkung. Wie man leicht sieht, sind die durch

$$[G/H] \mapsto \operatorname{Ind}_H^G(1_H)$$

für $H \leq G$ definierten linearen Abbildungen $\pi : B(G) \to \mathrm{R}(G)$ und $\overline{\pi} : B_k(G) \to \mathrm{R}_k(G)$ Ringhomomorphismen. Für $g \in G$ und $H \leq G$ gilt außerdem:

$$\begin{aligned}\sigma_g(\pi([G/H])) &= \sigma_g(\operatorname{Ind}_H^G 1_H) = (\operatorname{Ind}_H^G 1_H)(g) = |\{xH \in G/H : gxH = xH\}| \\ &= |[G/H]^{\langle g\rangle}| = \varphi_{\langle g\rangle}([G/H]),\end{aligned}$$

wobei $\varphi_{\langle g\rangle} : B(G) \to \mathbb{Z}$ der Markenhomomorphismus der zyklischen Gruppe $\langle g\rangle$ ist. Dies zeigt, daß $\sigma_g \circ \pi = \varphi_{\langle g\rangle}$ ist.

Satz 3.11. $\mathrm{R}_k(G) = \sum\limits_{H \in \mathcal{E}_p} \operatorname{Ind}_H^G \mathrm{R}_k(H)$.

Beweis. Seien $\mathcal{S}$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Untergruppen von G, e_H $(H \in \mathcal{S})$ die primitiven Idempotente von $B_K(G)$ und $\mathcal{P} := \{H \in \mathcal{S} : \mathrm{O}^p(H) = H\}$ (siehe Abschnitt 2.2). Für $H \in \mathcal{P}$ seien außerdem $\mathcal{S}_H := \{I \in \mathcal{S} : \mathrm{O}^p(I) \sim_G H\}$ und $f_H := \sum_{I \in \mathcal{S}_H} e_I$. Nach Satz 2.9 sind $\overline{f_H}$ $(H \in \mathcal{P})$ die primitiven Idempotente von $B_k(G)$, und für $g \in G,\ H \in \mathcal{P}$ gilt nach der vorigen Bemerkung:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma_g}(\overline{\pi}(\overline{f_H})) = \overline{\sigma_g(\pi(f_H))} = \overline{\varphi_{\langle g\rangle}\big(\sum_{I \in \mathcal{S}_H} e_I\big)} &= \overline{\sum_{I \in \mathcal{S}_H} \varphi_{\langle g\rangle}(e_I)} \\ &= \begin{cases} 1_k, & \text{falls } \langle g\rangle \sim_G I \text{ für ein } I \in \mathcal{S}_H, \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Ein $I \in \mathcal{S}_H$ mit $\langle g\rangle \sim_G I$ existiert aber genau dann, wenn $H \sim_G \mathrm{O}^p(\langle g\rangle) = \langle g_{p'}\rangle$ ist. Ist H also keine zyklische p'-Untergruppe von G, so ist $\overline{\pi}(\overline{f_H})$ ein Idempotent in $\mathrm{R}_k(G)$ mit

$$\overline{\pi}(\overline{f_H}) \in \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker} \overline{\sigma_g} = \mathrm{JR}_k(G)$$

nach Lemma 1.16, d.h. $\overline{\pi}(\overline{f_H}) = 0$. Daher ist

$$\overline{1_G} = 1_{\mathrm{R}_k(G)} = \overline{\pi}(1_{B_k(G)}) = \overline{\pi}\Big(\sum_{H \in \mathcal{P}} \overline{f_H}\Big) = \sum_{\substack{H \in \mathcal{P} \\ H \text{ zykl. } p'\text{-Gr.}}} \overline{\pi}(\overline{f_H}).$$

Für eine zyklische p'-Gruppe $H \in \mathcal{P}$ besteht $\mathcal{S}_H$ aus p-quasielementaren Untergruppen von G. In diesem Fall ist nach Satz 2.4 also

$$f_H = \sum_{I \in \mathcal{S}_H} e_I \in \sum_{I \in \mathcal{S}_H} \sum_{L \lesssim I} K[G/L] \ \cap\ B_{\mathcal{O}}(G) \subseteq \sum_{L \in \mathcal{E}'_p} \mathcal{O}\,[G/L],$$

und daher

$$\overline{1_G} = \sum_{L \in \mathcal{E}'_p} \overline{\pi(\mathcal{O}\,[G/L])} \in \sum_{L \in \mathcal{E}'_p} \overline{\operatorname{Ind}_L^G(\mathrm{R}_{\mathcal{O}}(L))} = \sum_{L \in \mathcal{E}'_p} \operatorname{Ind}_L^G(\mathrm{R}_k(L)).$$

Für $L \in \mathcal{E}'_p$ wiederum ist nach dem Brauerschen Induktionssatz

$$\mathrm{R}_k(L) \subseteq \sum_{\substack{H \leq L \\ H \text{ elementar}}} \operatorname{Ind}_H^L(\mathrm{R}_k(H)).$$

Da jede elementare Untergruppe einer p-quasielementaren Gruppe p-elementar ist, folgt

$$\overline{1_G} \in \sum_{H \in \mathcal{E}_p} \operatorname{Ind}_H^G(\mathrm{R}_k(H)).$$

Die rechte Seite ist also ein Ideal in $\mathrm{R}_k(G)$, das $\overline{1_G} = 1_{\mathrm{R}_k(G)}$ enthält, d.h. es ist

$$\mathrm{R}_k(G) = \sum_{H \in \mathcal{E}_p} \operatorname{Ind}_H^G(\mathrm{R}_k(H)).$$

$\square$

Korollar 3.12. *Die Abbildung*

$$\bigoplus_{H \in \mathcal{E}_p} \operatorname{Res}_H^G \; : \; \mathrm{R}_k(G) \to \bigoplus_{H \in \mathcal{E}_p} \mathrm{R}_k(H)$$

ist Monomorphismus von k-Algebren.

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft ist klar. Zum Nachweis der Injektivität sei $x \in \mathrm{R}_k(G)$ mit $\operatorname{Res}_H^G x = 0$ für alle $H \in \mathcal{E}_p$. Nach dem vorigen Satz existieren Elemente $y_H \in \mathrm{R}_k(H)$ mit $1_G = \sum_{H \in \mathcal{E}_p} \operatorname{Ind}_H^G y_H$. Man erhält daher:

$$x = x \cdot 1_G = \sum_{H \in \mathcal{E}_p} x \cdot \operatorname{Ind}_H^G y_H = \sum_{H \in \mathcal{E}_p} \operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G x \cdot y_H) = 0.$$

$\square$

4. Radikal und Sockel

Wie die gewöhnlichen Charaktere bilden auch die Brauercharaktere zusammen mit der komponentenweise Addition und Multiplikation einen Halbring. Der daraus entstehende Grothendieck-Ring heißt *Brauercharakterring* und ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit den irreduziblen Brauercharakteren als Basis. Wir bezeichnen ihn mit $\mathrm{R}^p(G)$ und setzen wie üblich $\mathrm{R}_k^p(G) := k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}^p(G)$.

Bemerkung 3.13. Für jeden gewöhnlichen Charakter von G ist die Einschränkung auf $G_{p'}$ ein Brauercharakter. Durch lineare Fortsetzung der Abbildung $\chi \mapsto \chi|G_{p'}$ erhält man die *Zerlegungsabbildung* $d : \mathrm{R}(G) \to \mathrm{R}^p(G)$. Sie ist offenbar ein Ringhomomorphismus. Ist umgekehrt φ ein Brauercharakter, so wird durch $g \mapsto \varphi(g_{p'})$ ein Element im Charakterring definiert. Auch diese Abbildung induziert einen Ringhomomorphismus $d' : \mathrm{R}^p(G) \to \mathrm{R}(G)$, der wegen $d \circ d' = \mathrm{id}_{\mathrm{R}^p(G)}$ eine Zerfällung von d ist. Insbesondere ist d surjektiv und d' injektiv, und wir erhalten eine Zerlegung $\mathrm{R}(G) = \operatorname{Bild} d' \oplus \operatorname{Ker} d$ in des Ideal $\operatorname{Ker} d$ und die Unteralgebra $\operatorname{Bild} d' \cong \mathrm{R}^p(G)$ von $\mathrm{R}(G)$. Reduzieren wir modulo $\mathfrak{p}$, so erhalten wir Ringhomomorphismen $\overline{d} : \mathrm{R}_k(G) \to \mathrm{R}_k^p(G)$, $\overline{d'} : \mathrm{R}_k^p(G) \to \mathrm{R}_k(G)$ und eine Zerlegung $\mathrm{R}_k(G) = \operatorname{Bild} \overline{d'} \oplus \operatorname{Ker} \overline{d}$.

Satz 3.14. *Es ist* $\mathrm{JR}_k(G) = \operatorname{Ker} \overline{d}$*; insbesondere ist* $\mathrm{R}_k(G)/\mathrm{JR}_k(G) \cong \mathrm{R}_k^p(G)$.

Beweis. Nach Lemma 1.16 ist

$$\mathrm{JR}_k(G) = \bigcap_{g \in \mathcal{C}_{p'}} \operatorname{Ker} \overline{\sigma_g}.$$

Seien $\mathrm{CF}(G_{p'}, k)$ der k-Vektorraum aller Klassenfunktionen $G_{p'} \to k$ und $\mu : \mathrm{R}_k^p(G) \to \mathrm{CF}(G_{p'}, k)$ die k-lineare Abbildung, die einem Brauercharakter φ die Funktion $g \mapsto \overline{\varphi(g)}$ zuordnet. Da die Matrix $(\overline{\varphi(g)})_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G), g \in \mathcal{C}_{p'}}$ regulär ist (siehe Bemerkung 3.3), ist μ bijektiv, d.h. für jeden Brauercharakter φ gilt:

$$\overline{\varphi} = 0 \iff \overline{\varphi(g)} = 0 \text{ für alle } g \in G_{p'}.$$

Daher gilt für $x = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \alpha_\chi \overline{\chi} \in \mathrm{R}_k(G)$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{JR}_k(G) &\iff 0 = \overline{\sigma_g}(x) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \alpha_\chi \overline{\chi(g)} \text{ für alle } g \in G_{p'} \\ &\iff 0 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \alpha_\chi \overline{(d(\chi))(g)} \text{ für alle } g \in G_{p'} \\ &\iff 0 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \alpha_\chi \overline{d}(\overline{\chi}) = \overline{d}(x) \\ &\iff x \in \operatorname{Ker} \overline{d}. \end{aligned}$$

□

Beispiel. Ist G eine p-Gruppe, so existiert nur ein einziger irreduzibler Brauercharakter, nämlich der triviale Brauercharakter 1_G. Ist also χ ein nichtlinearer irreduzibler Charakter von G, so ist $d(\chi) = \chi(1) \cdot 1_G$ und $\overline{\chi} \in \operatorname{Ker} \overline{d} = \mathrm{JR}_k(G)$, da $\chi(1)$ eine p-Potenz ist. Andererseits kann man χ auch als irreduziblen Charakter der Gruppe $G/\operatorname{Ker}\chi$ und $\overline{\chi}$ als Element in $\mathrm{R}_k(G/\operatorname{Ker}\chi)$ auffassen. Als solches ist $\overline{\chi}$ ebenfalls nilpotent und damit in $\mathrm{JR}_k(G/\operatorname{Ker}\chi)$ enthalten. Wegen

$$\dim_k \mathrm{JR}_k(G/\operatorname{Ker}\chi) \leq \dim_k \mathrm{R}_k(G/\operatorname{Ker}\chi) \leq |G : \operatorname{Ker}\chi|$$

ist daher $\overline{\chi}^{\,|G:\operatorname{Ker}\chi|} = 0$ bzw. $\chi^{|G:\operatorname{Ker}\chi|} \in p\,\mathrm{R}(G)$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei ψ^n der n-te *Adams-Operator*, d.h. ψ^n ordnet jedem Charakter χ von G die Klassenfunktion $\psi^n(\chi)$ zu, die durch $(\psi^n(\chi))(g) := \chi(g^n)$ gegeben ist. Mit χ ist auch $\psi^n(\chi)$ ein Charakter von G, und dies induziert einen Ringhomomorphismus $\psi^n : \mathrm{R}(G) \to \mathrm{R}(G)$ (siehe etwa [**8**, Cor. 12.10]).

Lemma 3.15. *Für $\chi \in \mathrm{R}(G)$ ist $\chi^p \Leftrightarrow \psi^p(\chi) \in p\,\mathrm{R}(G)$.*

Beweis. (nach [**22**]) Ohne Einschränkung sei χ der Charakter eines $\mathbb{C}G$-Moduls V. Seien $g \in G, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die Eigenwerte der Operation von g auf V und $v_1, \ldots, v_n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann ist $\chi(g) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ und

$$\begin{aligned} \chi^p(g) \Leftrightarrow (\psi^p(\chi))(g) &= (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)^p \Leftrightarrow (\varepsilon_1^p + \ldots + \varepsilon_n^p) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, p-1\} \\ i_1 + \ldots + i_n = p}} \frac{p!}{i_1! \ldots i_n!}\, \varepsilon_1^{i_1} \ldots \varepsilon_n^{i_n} \\ &= p \cdot f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \end{aligned}$$

für ein symmetrisches Polynom $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, da $\frac{p!}{i_1! \dots i_n!}$ im Fall $i_1, \dots, i_n \neq p$ durch p teilbar ist.

Ist $\bigwedge^r V$ für $r \in \mathbb{N}$ die r-te äußere Potenz von V und χ_r der entsprechende Charakter, so ist $\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$ eine Basis von $\bigwedge^r V$ und daher

$$(\chi_r)(g) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_r} = s_r(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r),$$

wobei $s_r \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ das r-te elementarsymmetrische Polynom bezeichnet. Da sich jedes symmetrische Polynom als ein Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken läßt, zeigt dies, daß $\chi^p \Leftrightarrow \psi^p(\chi)$ das p-fache eines Polynoms in den äußeren Potenzen von χ ist.

Alternativer Beweis: (nach [**14**, Problem 4.7]) Ohne Einschränkung sei χ der Charakter eines $\mathbb{C}G$-Moduls V der Dimension n. Wir lassen eine zyklische Gruppe $C = \langle \alpha \rangle$ der Ordnung p auf $W = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p}$ durch

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)^\alpha := x_2 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x_1$$

für $x_1, \dots, x_p \in V$ operieren. Sei ε eine primitive p-te Einheitswurzel. Wir zerlegen $W = \oplus_{i=0}^{p-1} W_i$ in Komponenten W_i, so daß α auf W_i durch Multiplikation mit ε^i operiert.

Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{W} \subseteq W$ die Menge aller Elemente $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p}$ mit $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$, so daß nicht alle $v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$ gleich sind. C operiert auch auf $\mathcal{W}$, und wegen $w^\alpha \neq w$ für $w \in \mathcal{W}$ ist jede Bahn von der Länge p. Für $w \in \mathcal{W}$ sei außerdem

$$\overline{w} := w + \varepsilon^{-1} w^\alpha + \varepsilon^{-2} w^{\alpha^2} + \dots + \varepsilon^{-(p-1)} w^{\alpha^{p-1}}.$$

Dann ist

$$\overline{w}^{\,\alpha} = w^\alpha + \varepsilon^{-1} w^{\alpha^2} + \dots + \varepsilon^{-(p-1)} w^{\alpha^p} = \varepsilon(\varepsilon^{-1} w^\alpha + \varepsilon^{-2} w^{\alpha^2} + \dots w) = \varepsilon \overline{w},$$

d.h. es ist $\overline{w} \in W_1$. Liegen $w, w' \in \mathcal{W}$ nicht in derselben Bahn unter C, so sind $\overline{w}, \overline{w'}$ offenbar linear unabhängig. Daher enthält $\mathcal{W}$ mindestens $|\mathcal{W}|/p = \frac{n^p - p}{p}$ linear unabhängige Elemente. Folglich ist $\dim W_1 \geq \frac{n^p - p}{p}$, und analog ist $\dim W_i \geq \frac{n^p - p}{p}$ für $i = 2, \dots, p \Leftrightarrow 1$. W_0 hat zusätzlich die n Basiselemente $v_j \otimes \dots \otimes v_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Insgesamt ist also

$$n^p = \dim W = \sum_{i=0}^{p-1} \dim W_i \geq \left(n + \frac{n^p \Leftrightarrow p}{p}\right) + (p \Leftrightarrow 1) \frac{n^p \Leftrightarrow p}{p} = n + (n^p \Leftrightarrow n) = n^p.$$

Dies zeigt $\dim W_1 = \frac{n^p - p}{p}$, und die Elemente $\overline{w}$ bilden eine Basis von W_1, wenn w ein Repräsentantensystem für die Bahnen von $\mathcal{W}$ unter C durchläuft.

Sei jetzt ein Element $g \in G$ gegeben, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von g auf V und $v_1, \dots, v_n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Für $w = v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p} \in \mathcal{W}$ ist offenbar $g w^\alpha = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} w^\alpha$, also auch $g\overline{w} = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} \overline{w}$. Daher gilt für den Charakter φ von W_1:

$$\begin{aligned} p \cdot \varphi(g) &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\} \\ \text{nicht alle } i_j \text{ gleich}}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^p \Leftrightarrow (\lambda_1^p + \dots + \lambda_n^p) \\ &= \chi^p(g) \Leftrightarrow (\psi^p(\chi))(g), \end{aligned}$$

d.h. $\chi^p \Leftrightarrow \psi^p(\chi) = p \cdot \varphi \in p\,\mathrm{R}(G)$. □

Satz 3.16. *Seien $x \in \mathrm{JR}_k(G)$, m der Exponent von G, und für $n \in \mathbb{N}_0$ seien*

$$G_n := \{g \in G : g^{p^n} \in G_{p'}\},$$
$$K_n := \bigcap_{g \in G_n} \operatorname{Ker} \sigma_g.$$

Dann gilt:

$$x^{p^n} \in \overline{K_n} := k \otimes_{\mathcal{O}} K_n.$$

Insbesondere ist $x^{m_p} = 0$.

Beweis. Nach Lemma 1.16 ist $\mathrm{JR}_k(G) = \bigcap_{g \in G_{p'}} \operatorname{Ker} \overline{\sigma_g}$. Daraus folgt die Behauptung für $n = 0$. Seien also $n > 0$ und $g \in G_n$. Dann ist $g^p \in G_{n-1}$, d.h. für $\chi \in K_{n-1}$ ist

$$0 = \sigma_{g^p}(\chi) = \sigma_g(\psi^p(\chi)).$$

Daher ist $\psi^p(\chi) \in K_n$ und $\overline{\chi^p} = \overline{\psi^p(\chi)} \in \overline{K_n}$ nach Lemma 3.15. Dies zeigt, daß $x^p \in \overline{K_n}$ für alle $x \in \overline{K_{n-1}}$ ist, und die Behauptung folgt durch Induktion. Für $n = m_p$ schließlich ist $G_{m_p} = G$ und $x^{m_p} \in k \otimes_{\mathcal{O}} \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker} \sigma_g = 0$. □

Bemerkung. Daß die Aussage $(\mathrm{JR}_k(G))^{m_p} = 0$ für den Exponenten m von G i.a. falsch ist, zeigt bereits das Beispiel einer Kleinschen Vierergruppe V_4 und $p = 2$; denn ist $\mathrm{Irr}(V_4) = \{1, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ mit dem trivialen Charakter 1 und drei weiteren linearen Charakteren χ_1, χ_2, χ_3, so ist

$$\mathrm{JR}_k(V_4) = k\{\overline{1+\chi_1},\ \overline{1+\chi_2},\ \overline{1+\chi_3}\}$$

und

$$(\mathrm{JR}_k(V_4))^2 = k\{\overline{1+\chi_1+\chi_2+\chi_3}\} \neq 0.$$

Um den Sockel von $\mathrm{R}_k(G)$ zu beschreiben, benötigen wir das folgende einfache Lemma. Für einen k-Vektorraum V und einen Untervektorraum U von V bezeichnen wir mit V^* den Dualraum von V und mit $U^\top := \{\psi \in V^* : \psi(U) = 0\}$ den Lotraum von U in V^*.

Lemma 3.17. *Seien V, W zwei k-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $f^* : W^* \to V^*$ die zu f duale Abbildung. Dann ist*

$$(\operatorname{Ker} f)^\top = \operatorname{Bild} f^*.$$

Beweis. Sei $\psi \in \operatorname{Bild} f^*$, etwa $\psi = f^*(\rho) = \rho \circ f$ für ein $\rho \in W^*$. Dann ist

$$\psi(\operatorname{Ker} f) = \rho(f(\operatorname{Ker} f)) = \rho(0) = 0.$$

Dies zeigt, daß $\operatorname{Bild} f^*$ in $(\operatorname{Ker} f)^\top$ enthalten ist. Die Gleichheit folgt aus

$$\dim_k (\operatorname{Ker} f)^\top = \dim_k V \Leftrightarrow \dim_k \operatorname{Ker} f = \dim_k \operatorname{Bild} f = \dim_k \operatorname{Bild} f^*.$$

□

Bemerkung 3.18. Bekanntlich stehen die einfachen kG-Moduln in Bijektion zu den unzerlegbar projektiven kG-Moduln. Diese wiederum kann man eindeutig zu unzerlegbar projektiven $\mathcal{O}G$-Moduln liften. Auf diese Weise erhält man eine Bijektion zwischen $\mathrm{IBr}(G)$ und der Menge $\mathrm{IPr}(G)$ der Charaktere der unzerlegbar projektiven $\mathcal{O}G$-Moduln, der sog. *unzerlegbar projektiven Charaktere*. Für jedes $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ bezeichnen wir mit $\eta_\varphi : G \to \mathcal{O}$ den entsprechenden unzerlegbar projektiven Charakter. $\mathrm{IPr}(G)$ ist eine linear unabhängige Teilmenge des Charakterrings $\mathrm{R}(G)$, und wir schreiben $\mathrm{R}^{pr}(G)$ für den von $\mathrm{IPr}(G)$ aufgespannten Teilring von $\mathrm{R}(G)$. $\mathrm{R}^{pr}(G)$ besitzt i.a. kein Einselement und ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\mathrm{IPr}(G)$. Wir setzen außerdem wie üblich $\mathrm{R}_k^{pr}(G) := k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}^{pr}(G)$.

Reduziert man die Einbettung $e : \mathrm{R}^{pr}(G) \to \mathrm{R}(G)$ modulo $\mathfrak{p}$, so erhält man einen Homomorphismus $\overline{e} : \mathrm{R}_k^{pr}(G) \to \mathrm{R}_k(G)$ von k-Algebren, von dem allerdings a priori nicht klar, ob er injektiv ist. Die Brauer-Reziprozität jedoch besagt, daß die Matrix von e bzgl. den Basen $\mathrm{IPr}(G)$ und $\mathrm{Irr}(G)$ die Zerlegungsmatrix D ist. Da alle Elementarteiler von D gleich 1 sind (siehe [**8**, Cor. 18.17]), hat D auch modulo p vollen Rang, d.h. $\overline{e}$ ist injektiv.

Satz 3.19. *Das Bild der Abbildung* $\overline{e} : \mathrm{R}_k^{pr}(G) \to \mathrm{R}_k(G)$ *ist der Sockel von* $\mathrm{R}_k(G)$*; insbesondere ist* $\mathrm{Soc}\, R_k(G) \cong R_k^{pr}(G)$.

Beweis. Nach Satz 3.8 existiert eine Bilinearform β, die $\mathrm{R}_k(G)$ zu einer symmetrischen Algebra macht. Ist I ein Ideal in $\mathrm{R}_k(G)$, so ist das Lot $I^\perp := \{x \in \mathrm{R}_k(G) : \beta(x, I) = 0\}$ bzgl. β gleich dem Annullator $\mathrm{Ann}\, I$ von I. Außerdem wird $I^\perp$ unter dem Isomorphismus

$$\Phi : \mathrm{R}_k(G) \to \mathrm{R}_k(G)^*,\ x \mapsto \beta(x, \overline{\cdot})$$

auf $I^\top$ abgebildet, d.h. es ist

$$\mathrm{Ann}\, I = I^\perp = \Phi^{-1}(I^\top).$$

Nach Satz 3.14 ist $\mathrm{J}R_k(G)$ der Kern der Zerlegungsabbildung $\overline{d} : \mathrm{R}_k(G) \to \mathrm{R}_k^p(G)$. Daher ist nach dem vorigen Lemma

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}\,\mathrm{R}_k(G) &= \mathrm{Ann}\,\mathrm{JR}_k(G) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\,\overline{d}) = \Phi^{-1}((\mathrm{Ker}\,\overline{d})^\top)\\ &= \Phi^{-1}(\mathrm{Bild}\,\overline{d}^{\,*}) = \mathrm{Bild}(\Phi^{-1} \circ \overline{d}^{\,*}),\end{aligned}$$

wobei $\overline{d}^{\,*} : \mathrm{R}_k^p(G)^* \to \mathrm{R}_k(G)^*$ die zu $\overline{d}$ duale Abbildung ist. Wir bezeichnen mit $\{\chi^* : \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ die zu $\mathrm{Irr}(G)$ duale Basis in $\mathrm{R}_k(G)^*$, und für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ sei $\hat{\chi}$ der zu χ duale Charakter. Analog seien φ^* und $\hat{\varphi}$ für $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ definiert. Wie der Beweis von Satz 3.8 zeigt, ist $\Phi(\hat{\chi}) = \chi^*$, und für $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ gilt:

$$\begin{aligned}(\Phi^{-1} \circ \overline{d}^{\,*})(\varphi^*) &= \Phi^{-1}\Big(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\varphi}\,\chi^*\Big) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\varphi}\,\hat{\chi}\\ &= \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\hat{\chi}\hat{\varphi}}\,\hat{\chi} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\hat{\varphi}}\,\chi = \overline{e}(\eta_{\hat{\varphi}}).\end{aligned}$$

Da $\{\eta_{\hat{\varphi}} : \varphi \in \mathrm{IBr}(G)\}$ eine Basis von $\mathrm{R}_k^{pr}(G)$ ist, folgt

$$\mathrm{Soc}\,\mathrm{R}_k(G) = \mathrm{Bild}(\Phi^{-1} \circ \overline{d}^{\,*}) = \mathrm{Bild}(\overline{e}) \cong \mathrm{R}_k^{pr}(G).$$

$\square$

KAPITEL 4

Der Grothendieck-Ring

Seien G eine endliche Gruppe und F ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir bezeichnen mit $[M]$ die Isomorphieklasse eines FG-Moduls M. Der *Green-Ring* $a(FG)$ ist der von den Isomorphieklassen von FG-Moduln erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul bzgl. der Relation

$$[M] + [N] = [M \oplus N]$$

und ausgestattet mit der Multiplikation

$$[M] \cdot [N] := [M \otimes_F N]$$

für FG-Moduln M, N. Nach dem Satz von Krull-Schmidt ist $a(FG)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit den Isomorphieklassen von unzerlegbaren FG-Moduln als Basis.

Sei $a_0(FG)$ das von Elementen der Form $[M] \Leftrightarrow [N] + [P]$ erzeugte Ideal in $a(FG)$, wobei $0 \to M \to N \to P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von FG-Moduln ist. Wir bezeichnen den Restklassenring $c(FG) := a(FG)/a_0(FG)$ als *Grothendieck-Ring* von FG und schreiben $[\![M]\!]$ für die Nebenklasse $[M] + a_0(FG)$ in $c(FG)$. Nach dem Satz von Jordan-Hölder ist $c(FG)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit den Isomorphieklassen von einfachen FG-Moduln als Basis, und für FG-Moduln M, N gilt $[\![M]\!] = [\![N]\!]$ genau dann, wenn M und N bis auf Isomorphie dieselben Kompositionsfaktoren (einschließlich Mehrfachheit) besitzen.

Im Fall $\operatorname{char} F = 0$ (oder allgemeiner $\operatorname{char} F \nmid |G|$) ist die Abbildung $[\![M]\!] \mapsto \chi_M$, die jedem FG-Modul seinen Charakter zuordnet, ein Ringisomorphismus von $c(FG)$ in den Charakterring $\mathrm{R}(G)$, der in Kapitel 3 behandelt wird. Wir konzentrieren uns daher auf den Fall $q := \operatorname{char} F > 0$ und wählen ein q-modulares System (L, R, F), d.h. einen vollständigen diskreten Bewertungsring R mit maximalem Ideal πR, Quotientenkörper L und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper $F = R/\pi R$. Außerdem enthalte L die $|G|$-ten Einheitswurzeln.

1. Der gewöhnliche Fall

Sei m der Exponent von G und K ein Körper der Charakteristik 0, der die $m_{q'}$-ten Einheitswurzeln enthält, und dessen Ganzheitsring $\mathcal{O}$ über $\mathbb{Z}$ ein Dedekindring ist (z.B. der m-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$). Wir wollen den Koeffizientenbereich von $c(FG)$ auf $\mathcal{O}$ bzw. K erweitern, d.h. wir betrachten $C_{\mathcal{O}}(FG) := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} c(FG)$ und $C_K(FG) := K \otimes_{\mathbb{Z}} c(FG)$. Für jeden FG-Modul M sei $\varphi_M : G_{q'} \to R$ der Brauercharakter von M. φ_M hängt bekanntlich nur von der Äquivalenzklasse $[\![M]\!]$, nicht aber von M selbst ab. Wir wählen ein Repräsentantensystem $\mathcal{S}$ für die Isomorphieklassen von einfachen FG-Moduln, und mit $\mathrm{IBr}(G) := \{\varphi_S : S \in \mathcal{S}\}$ bezeichnen wir die Menge der irreduziblen Brauercharaktere. Für $S \in \mathcal{S}$ sei η_S der zu S gehörige unzerlegbar projektive Charakter (siehe Bemerkung 3.18). Außerdem wählen wir einen Isomorphismus zwischen den Gruppen der $m_{q'}$-ten Einheitswurzeln in R bzw. $\mathcal{O}$. Auf diese Weise werden wir φ_M auch als Abbildung $G_{q'} \to \mathcal{O}$

auffassen, und wir können für $g \in G_{q'}$ eine $\mathcal{O}$-lineare Abbildung

$$\sigma_g : C_{\mathcal{O}}(FG) \to \mathcal{O},\ [\![M]\!] \mapsto \varphi_M(g)$$

definieren. σ_g ist offenbar wohldefiniert und ein Ringhomomorphismus, also ein Species von $C_{\mathcal{O}}(FG)$. Diese Species werden auch *Brauer-Species* genannt. Die Fortsetzung $C_K(FG) \to K$ von σ_g bezeichnen wir ebenfalls mit σ_g.

Satz 4.1. *Für $g, h \in G_{q'}$ gilt: $\sigma_g = \sigma_h \iff g \sim_G h$.*

Beweis. $\Leftarrow$: Sei $g \sim_G h$. Da Brauercharaktere konstant auf den q'-Konjugationsklassen von G sind, ist $\varphi_M(g) = \varphi_M(h)$ für jeden FG-Modul M, d.h. $\sigma_g = \sigma_h$.

$\Rightarrow$: Wie in 3.3 bemerkt, sind die irreduziblen Brauercharaktere linear unabhängig im K-Vektorraum aller Funktionen $G_{q'} \to K$, die konstant auf allen q'-Konjugationsklassen von G sind. Ist also $\varphi(g) = \varphi(h)$ für alle $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, so sind g und h in G konjugiert. □

Sei $\mathcal{C}_{q'}$ ein Repräsentantensystem für die q'-Konjugationsklassen von G, dann gilt:

Satz 4.2.

(i) *$C_{\mathcal{O}}(FG)$ ist eine geschlossene $\mathcal{O}$-Algebra mit* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{O}}(C_{\mathcal{O}}(FG)) = \{\sigma_g : g \in \mathcal{C}_{q'}\}$.

(ii) *Die Abbildung*

$$\sigma := \bigoplus_{g \in \mathcal{C}_{q'}} \sigma_g \ :\ C_K(FG) \to \bigoplus_{g \in \mathcal{C}_{q'}} K$$

ist ein Isomorphismus von K-Algebren; insbesondere ist $C_K(FG)$ ist halbeinfach.

(iii) *Die primitiven Idempotente von $C_K(FG)$ sind*

$$e_g = \frac{1}{|\mathrm{C}_G(g)|} \sum_{S \in \mathcal{S}} \eta_S(g^{-1})\, [\![S]\!] \qquad (g \in \mathcal{C}_{q'}).$$

Beweis. (i) Nach Satz 4.1 sind die Species σ_g $(g \in \mathcal{C}_{q'})$ paarweise verschieden. Daher ist

$$|\,\mathrm{Sp}_{\mathcal{O}}(C_{\mathcal{O}}(FG))| \geq |\mathcal{C}_{q'}| = |\,\mathrm{IBr}(G)| = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, c(FG) = \dim_K C_K(FG),$$

und die Behauptung folgt aus Satz 1.7.

(ii) Dies folgt aus (i) und Satz 1.7.

(iii) Nach (ii) sind die primitiven Idempotente die Urbilder der kanonischen primitiven Idempotente ε_g $(g \in \mathcal{C}_{q'})$ in $\bigoplus_{g \in \mathcal{C}_{q'}} K$ unter σ. Seien also $g \in \mathcal{C}_{q'}$ und $e_g := \sigma^{-1}(\varepsilon_g)$. Für $S \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\sigma([\![S]\!]) = \sum_{h \in \mathcal{C}_{q'}} \sigma_h([\![S]\!])\, \varepsilon_h = \sum_{h \in \mathcal{C}_{q'}} \varphi_S(h)\, \varepsilon_h.$$

Mit Hilfe der zweiten Orthogonalitätsrelation für Brauercharaktere erhält man daher für $g \in \mathcal{C}_{q'}$:

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}} \eta_S(g^{-1})\, \sigma([\![S]\!]) &= \sum_{S \in \mathcal{S}} \eta_S(g^{-1}) \sum_{h \in \mathcal{C}_{q'}} \varphi_S(h)\, \varepsilon_h \\ &= \sum_{h \in \mathcal{C}_{q'}} \sum_{S \in \mathcal{S}} \varphi_S(h)\, \eta_S(g^{-1})\, \varepsilon_h = |\mathrm{C}_G(g)|\, \varepsilon_g. \end{aligned}$$

□

2. Der modulare Fall

Sei p eine Primzahl. Da $\mathcal{O}$ eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$ ist, existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}$ mit $p \in \mathfrak{p}$, und wir erhalten einen Restklassenkörper $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ der Charakteristik p. Wir wollen $C_k(FG) := k \otimes_{\mathcal{O}} C_{\mathcal{O}}(FG) = k \otimes_{\mathbb{Z}} c(FG)$ untersuchen. Wie üblich bezeichnen wir mit $\overline{\cdot}$ die Reduktion modulo $\mathfrak{p}$.

Lemma 4.3. *Für $g, h \in G_{q'}$ gilt:*

$$\overline{\sigma_g} = \overline{\sigma_h} \iff g_{p'} \sim_G h_{p'}.$$

Beweis. $\Leftarrow$: Sei $g_{p'} \sim_G h_{p'}$. Für $S \in \mathcal{S}$ ist die Funktion $\chi : G \to K,\ g \mapsto \varphi_S(g_{q'})$ ein verallgemeinerter Charakter. Nach Lemma 3.4 ist daher

$$\sigma_g([\![S]\!]) = \varphi_S(g) = \chi(g) \equiv \chi(h) = \varphi_S(h) = \sigma_h([\![S]\!]) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

$\Rightarrow$: Sei $\overline{\sigma_g} \equiv \overline{\sigma_h}$, also $\varphi(g) \equiv \varphi(h) \pmod{\mathfrak{p}}$ für jeden Brauercharakter φ von G. Für jedes $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ist die Einschränkung $\chi|G_{q'}$ ein Brauercharakter und daher

$$\chi(g) = (\chi|G_{q'})(g) \equiv (\chi|G_{q'})(h) = \chi(h) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Folglich ist $g_{p'} \sim_G h_{p'}$ nach Lemma 3.4. □

Wir setzen

$$\mathcal{C}_{\{p,q\}'} := \mathcal{C}_{q'} \cap G_{p'}$$

und für $g \in \mathcal{C}_{\{p,q\}'}$

$$\mathcal{C}_{q',g} := \{h \in \mathcal{C}_{q'} : h_{p'} \sim_G g\}.$$

$\mathcal{C}_{\{p,q\}'}$ ist also ein Repräsentantensystem für die $\{p,q\}'$-Konjugationsklassen von G, und $\mathcal{C}_{q'}$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $\mathcal{C}_{q',g}$ $(g \in \mathcal{C}_{\{p,q\}'})$.

Satz 4.4. *Für $g \in \mathcal{C}_{\{p,q\}'}$ sei*

$$f_g := \sum_{h \in \mathcal{C}_{q',g}} e_h.$$

Dann ist $\{\overline{f_g} : g \in \mathcal{C}_{\{p,q\}'}\}$ die Menge der primitiven Idempotente von $C_k(FG)$.

Beweis. Lemma 4.3, Lemma 1.4 und Satz 1.13. □

Satz 4.5. *Sei $g \in \mathcal{C}_{\{p,q\}'}$. Der Block $C_k(FG)\overline{f_g}$ ist genau dann eine einfache k-Algebra, wenn $p \nmid |\mathrm{C}_G(g)|_{q'}$ ist. Insbesondere ist $C_k(FG)$ genau dann halbeinfach, wenn $p \nmid |G|_{q'}$ ist.*

Beweis. Nach Satz 1.15 gilt:

$$C_k(FG)\overline{f_g} \text{ einfach} \iff |\mathcal{C}_{q',g}| = 1.$$

Im Fall $p = q$ ist offenbar $|\mathcal{C}_{q',g}| = 1$ und $p \nmid |\mathrm{C}_G(g)|_{q'}$ für alle $g \in \mathcal{C}_{\{p,q\}'}$ und daher die Behauptung erfüllt.

Sei also $p \neq q$. Existiert ein Element $h \in \mathcal{C}_{q',g} \setminus \{g\}$, so ist $h_{p'} \sim_G g$ und $1 \neq h_p \in \mathrm{C}_g(h_{p'})$. Daher ist $p \mid |\mathrm{C}_g(h_{p'})| = |\mathrm{C}_G(g)|$ und damit auch $p \mid |\mathrm{C}_G(g)|_{q'}$.

Ist umgekehrt $p \mid |\mathrm{C}_G(g)|_{q'}$ und h ein Element der Ordnung p in $\mathrm{C}_G(g)_{q'}$, so ist $(gh)_{p'} = g$, und gh oder ein zu gh konjugiertes Element liegt in $\mathcal{C}_{q',g}$. □

Bemerkung. Im Fall $p = q$ bleibt der Grothendieck-Ring $C_k(FG)$ nach Reduktion modulo $\mathfrak{p}$ also halbeinfach, auch wenn p ein Primteiler von G ist. Dies erkennt man auch an der Tatsache, daß die modulo $\mathfrak{p}$ reduzierte Brauercharaktertafel regulär ist (siehe Bemerkung 3.3). Schließlich zeigt auch Satz 3.14, daß $C_k(FG) \cong \mathrm{R}_k^p(G) \cong \mathrm{R}_k(G)/\mathrm{JR}_k(G)$ halbeinfach ist.

Satz 4.6. *$c(FG)$ besitzt keine nichttrivialen Idempotente.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.7. □

Satz 4.7. *$C_k(FG)$ ist eine symmetrische k-Algebra.*

Beweis. Im Fall $p = q$ ist $C_k(FG)$ halbeinfach und damit symmetrisch. Sei daher $p \neq q$. Wir definieren eine Linearform $\lambda : C_k(FG) \to k$ durch

$$[\![S]\!] \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \varphi_S(g) \cdot 1_k$$

für $S \in \mathcal{S}$. Zum Nachweis der Wohldefiniertheit müssen wir zeigen, daß $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \varphi_S(g)$ in $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ enthalten ist; denn dann können wir $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \varphi_S(g)$ über die kanonische Abbildung

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}/\mathfrak{p} = k$$

als Element in k auffassen. Desweiteren ist noch zu zeigen, daß die zu λ gehörige Bilinearform

$$\beta : C_k(FG) \times C_k(FG) \to k,\ (x, y) \mapsto \lambda(xy)$$

nichtausgeartet ist.

Für $S, T \in \mathcal{S}$ seien

$$b_{ST} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \varphi_S(g)\, \varphi_T(g)$$

und $B := (b_{ST})_{S,T \in \mathcal{S}}$. Außerdem seien $C = (c_{ST})_{S,T \in \mathcal{S}}$ die Cartan-Matrix von FG, $C^{-1} = (c'_{ST})_{S,T \in \mathcal{S}}$ ihre Inverse, und für $S \in \mathcal{S}$ sei $\hat{S} := \mathrm{Hom}_{FG}(S, F)$ der zu S duale FG-Modul; dabei bezeichnet F den trivialen FG-Modul. Nach der ersten Orthogonalitätsrelation für Brauercharaktere gilt für $S, T \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} b_{ST} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \varphi_S(g)\, \varphi_T(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \sum_{U \in \mathcal{S}} c'_{SU}\, \eta_U(g)\, \varphi_{\hat{T}}(g^{-1}) \\ &= \sum_{U \in \mathcal{S}} c'_{SU} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \eta_U(g)\, \varphi_{\hat{T}}(g^{-1}) = c'_{S\hat{T}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $B = \hat{C}^{-1}$ ist, wobei $\hat{C}$ aus C dadurch entsteht, daß man die Zeilen und Spalten von zueinander dualen einfachen FG-Moduln vertauscht. Da $\det C$ eine q-Potenz ist (siehe [**8**, Thm. 18.25]), sind die Koeffizienten von B in $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ enthalten; insbesondere ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{q'}} \varphi_S(g) = b_{SF} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}.$$

Außerdem ist $\det B = \det C^{-1} = (\det C)^{-1} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Daher ist die Strukturmatrix $\overline{B}$ von β über k invertierbar, d.h. β ist nichtausgeartet. □

Bemerkung. Im Fall $p = q \mid |G|$ ist $C_k(FG)$ zwar symmetrisch, aber die im obigen Beweis angegebene Linearform λ ist nicht wohldefiniert; wegen $p \nmid |G_{p'}|$ gilt nämlich für den trivialen FG-Modul F:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{p'}} \varphi_F(g) = \frac{|G_{p'}|}{|G|} \notin \mathcal{O}_\mathfrak{p}.$$

Stattdessen macht die durch

$$[\![S]\!] \mapsto \sum_{g \in \mathcal{P}} \varphi_S(g) \cdot 1_k = \sum_{g \in G_{p'}} \frac{1}{|\mathrm{C}_G(g)|} \varphi_S(g) \cdot 1_k$$

für $S \in \mathcal{S}$ definierte Linearform $C_k(FG)$ zu einer symmetrischen k-Algebra.

Zuletzt übertragen wir die Abschätzung des Nilpotenzgrades von Radikalelementen des Charakterrings auf den Grothendieck-Ring.

Satz 4.8. *Sei m der Exponent von G. Dann ist $x^{m_p} = 0$ für jedes $x \in \mathrm{J}C_k(FG)$.*

Beweis. Sei $R^q(G)$ der Brauercharakterring von FG. Die durch $[\![M]\!] \mapsto \varphi_M$ definierten Abbildungen $C(FG) \to \mathrm{R}^q(G)$ und $C_k(FG) \to R_k^q(G)$ sind Ringisomorphismen, und statt einem Element aus $\mathrm{J}C_k(FG)$ können wir daher ein $x \in \mathrm{JR}_k^q(G)$ betrachten. Wir verwenden außerdem die Homomorphismen $\overline{d} : \mathrm{R}_k(G) \to \mathrm{R}_k^q(G)$ und $\overline{d'} : \mathrm{R}_k^q(G) \to \mathrm{R}_k(G)$ aus Bemerkung 3.13. Da mit x auch $\overline{d'}(x)$ nilpotent ist, ist $\overline{d'}(x) \in \mathrm{JR}_k(G)$ und daher $\overline{d'}(x)^{m_p} = 0$ nach Satz 3.16. Wegen $\overline{d} \circ \overline{d'} = \mathrm{id}_{\mathrm{R}_k^q(G)}$ ist somit

$$x^{m_p} = (\overline{d} \circ \overline{d'})(x^{m_p}) = \overline{d}(\overline{d'}(x)^{m_p}) = \overline{d}(0) = 0.$$

□

KAPITEL 5

Der Trivial-Source-Ring

Seien G eine endliche Gruppe, q eine Primzahl und (L, R, F) ein q-modulares System, d.h. ein vollständiger diskreter Bewertungsring R mit maximalem Ideal πR, Quotientenkörper L und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper $F = R/\pi R$ der Charakteristik q. L enthalte außerden die $|G|$-ten Einheitswurzeln. Mit $a(FG, \mathrm{Triv})$ bezeichnen wir den *Trivial-Source-Ring* von FG, d.h. den Teilring des Green-Rings, der von den q-Permutationsmoduln bzw. den Moduln mit trivialer Quelle erzeugt wird. Zur Theorie von Vertex und Quelle verweisen wir auf [**1**]. Für jeden q-Permutationsmodul M schreiben wir $[M]$ für die Isomorphieklasse von M. $a(FG, \mathrm{Triv})$ ist ein endlich-erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul mit den Isomorphieklassen von unzerlegbaren q-Permutationsmoduln als Basis.

1. Der gewöhnliche Fall

Sei m der Exponent von G und K ein Körper der Charakteristik 0, der die $m_{q'}$-ten Einheitswurzeln enthält, und dessen Ganzheitsring $\mathcal{O}$ über $\mathbb{Z}$ ein Dedekindring ist (z.B. der $m_{q'}$-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$). Das Ziel unserer Untersuchung sind $A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv}) := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} a(FG, \mathrm{Triv})$ und $A_K(FG, \mathrm{Triv}) := K \otimes_{\mathbb{Z}} a(FG, \mathrm{Triv})$. Wie in Kapitel 4 wählen wir einen Isomorphismus zwischen den Gruppen der $m_{q'}$-ten Einheitswurzeln von R bzw. $\mathcal{O}$. Er erlaubt es uns, Brauercharaktere von G sowie von Unter- und Faktorgruppen als Abbildungen nach $\mathcal{O}$ aufzufassen. Davon werden wir im folgenden ohne weiteren Kommentar Gebrauch machen.

Seien M ein unzerlegbarer q-Permutationsmodul von FG mit Vertex Q und N sein Green-Korrespondent, d.h. der (eindeutig bestimmte) unzerlegbare direkte Summand von $\mathrm{Res}^G_{\mathrm{N}_G(Q)} M$ mit Vertex Q. Da N ebenfalls eine triviale Quelle besitzt und Q normal in $\mathrm{N}_G(Q)$ ist, operiert Q trivial auf N, d.h. wir können N als projektiven $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$-Modul auffassen. Seien umgekehrt Q eine q-Untergruppe von G und N ein unzerlegbar projektiver $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$-Modul. Dann ist die Inflation $\mathrm{Inf}_Q^{\mathrm{N}_G(Q)} N$ ein unzerlegbarer q-Permutationsmodul für $\mathrm{N}_G(Q)$ mit Vertex Q. Wir bezeichnen mit N_Q den Green-Korrespondenten von $\mathrm{Inf}_Q^{\mathrm{N}_G(Q)} N$. N_Q ist also ein unzerlegbarer q-Permutationsmodul für FG, der ebenfalls Vertex Q besitzt. Wir erhalten so eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren q-Permutationsmoduln für FG mit Vertex Q und der Menge der Isomorphieklassen von projektiven $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$-Moduln.

Sei $\mathcal{S}_q(G)$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von q-Untergruppen von G, und für jedes $Q \in \mathcal{S}_q(G)$ sei $\mathcal{P}_Q$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen von unzerlegbar projektiven $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$-Moduln. Nach den obigen Bemerkungen ist dann

$$\mathcal{Y} := \{[N_Q] : Q \in \mathcal{S}_q(G),\ N \in \mathcal{P}_Q\}$$

eine $\mathbb{Z}$-Basis von $a(FG, \mathrm{Triv})$.

Wir konstruieren auf folgende Weise Species von $A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv})$: Seien M ein q-Permutationsmodul, Q eine q-Untergruppe von G und $g \in \mathrm{N}_G(Q)$, so daß gQ ein q'-Element in $\mathrm{N}_G(Q)/Q$ ist. Seien außerdem $\mathrm{Res}^G_{\langle Q,g\rangle} M = M' \oplus M''$, wobei M' eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln mit Vertex Q und M'' eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln mit einer echten Untergruppe von Q als Vertex ist. Dann operiert Q trivial auf M' und wir können M' als projektiven $F[\langle Q,g\rangle/Q]$-Modul auffassen. Wir setzen

$$\sigma_{Q,g}([M]) := \varphi_{M'}(gQ),$$

wobei $\varphi_{M'}$ der Brauercharakter des $F[\langle Q,g\rangle/Q]$-Moduls M' ist. Wir erhalten so eine lineare Abbildung $\sigma_{Q,g} : A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv}) \to \mathcal{O}$, die wegen $(M \otimes_F N)' = M' \otimes_F N'$ für q-Permutationsmoduln M, N ein Species von $A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv})$ ist. Diese Konstruktion geht auf S. Conlon zurück. Species dieser Form werden daher auch oft als *Conlon-Species* bezeichnet.

Lemma 5.1. *Seien Q, R zwei q-Untergruppen von G, $gQ \in (\mathrm{N}_G(Q)/Q)_{q'}$ und M ein unzerlegbarer q-Permutationsmodul mit Vertex R. Ist Q nicht subkonjugiert zu R, so ist $\sigma_{Q,g}([M]) = 0$.*

Beweis. Jeder unzerlegbare direkte Summand von $\mathrm{Res}^G_{\langle Q,g\rangle} M$ besitzt eine Vertex, der in R enthalten ist. Zerlegen wir also $\mathrm{Res}^G_{\langle Q,g\rangle} M = M' \oplus M''$ wie oben, so ist $M' = 0$, wenn Q nicht subkonjugiert zu R ist. Folglich ist $\sigma_{Q,g}([M]) = \varphi_{M'}(gQ) = 0$. □

Satz 5.2 (S. Conlon). *Für $(Q, g), (R, h) \in X$ gilt:*

$$\sigma_{Q,g} = \sigma_{R,h} \iff \text{es existiert ein } x \in G \text{ mit } Q = {}^xR \text{ und } gQ = {}^xhQ.$$

Beweis. Siehe [**8**, 81.23]. □

Seien Q eine q-Untergruppe von G und $g \in \mathrm{N}_G(Q)$, so daß gQ ein q'-Element in $\mathrm{N}_G(Q)/Q$ ist. Da Q eine normale q-Sylowgruppe in $\langle Q, g\rangle$ ist, ist der q-Faktor g_q von g in Q enthalten, d.h. es ist $gQ = g_{q'} g_q Q = g_{q'} Q$. Dies zeigt, daß wir für jedes Element in $(\mathrm{N}_G(Q)/Q)_{q'}$ einen Nebenklassenvertreter aus $G_{q'}$ wählen können.

Lemma 5.3. *Für eine q-Untergruppe Q von G und $g, h \in \mathrm{N}_G(Q)_{q'}$ gilt: Sind gQ und hQ in $\mathrm{N}_G(Q)/Q$ konjugiert, so sind g und h in $\mathrm{N}_G(Q)$ konjugiert.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $gQ = hQ$ und daher $Q\langle g\rangle = \langle Q, g\rangle = \langle Q, h\rangle = Q\langle h\rangle$. Sowohl $\langle g\rangle$ als auch $\langle h\rangle$ ist ein teilerfremdes Komplement von Q in $Q\langle g\rangle$. Nach Schur-Zassenhaus existiert folglich ein $x \in Q\langle g\rangle$ mit $x\langle g\rangle x^{-1} = \langle h\rangle$. Ist $x = yz$ mit $y \in Q$ und $z \in \langle g\rangle$, so ist auch $y\langle g\rangle y^{-1} = \langle h\rangle$. Wegen $gh^{-1} \in Q$ und $hy^{-1}h^{-1} \in Q$ ist daher

$$ygy^{-1} \cdot h^{-1} = y \cdot gh^{-1} \cdot hy^{-1}h^{-1} \in \langle h\rangle \cap Q = 1,$$

d.h. $ygy^{-1} = h$. □

Wir setzen

$$X := \{(Q,g) : Q \text{ ist } q\text{-Untergruppe von } G,\ g \in \mathrm{N}_G(Q)_{q'}\}$$

und lassen die Gruppe G komponentenweise durch Konjugation auf X operieren. Mit $\mathcal{X}$ bezeichnen wir ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von X unter G. Dabei werden wir im folgenden stets annehmen, daß $Q \in \mathcal{S}_q(G)$ für alle $(Q,g) \in \mathcal{X}$ ist. Satz 5.2 zeigt zusammen mit dem vorigen Lemma, daß für $(Q,g),(R,h) \in X$ gilt:

$$\sigma_{Q,g} = \sigma_{R,h} \iff (Q,g) \sim_G (R,h).$$

Die Species $\sigma_{Q,g}$ $((Q,g) \in \mathcal{X})$ sind also paarweise verschieden.

Satz 5.4. $A_{\mathcal{O}}(FG,\mathrm{Triv})$ *ist eine geschlossene* $\mathcal{O}$*-Algebra mit* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{O}}(A_{\mathcal{O}}(FG,\mathrm{Triv})) = \{\sigma_{Q,g} : (Q,g) \in \mathcal{X}\}$, *und* $A_K(FG,\mathrm{Triv})$ *ist eine halbeinfache* K*-Algebra.*

Beweis. Für jede endliche Gruppe H sei $l_q(H)$ die Anzahl der q'-Konjugationsklassen von H, die zugleich auch die Anzahl der Isomorphieklassen von unzerlegbar projektiven FH-Moduln ist. Nach Lemma 5.3 gilt für $(Q,g),(R,h) \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}(Q,g) \sim_G (R,h) &\iff Q = R \text{ und } g \sim_{\mathrm{N}_G(Q)} h\\ &\iff Q = R \text{ und } gQ \sim_{\mathrm{N}_G(Q)/Q} hQ.\end{aligned}$$

Nach der Vorbemerkung ist daher

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{Sp}_{\mathcal{O}}(A_{\mathcal{O}}(FG,\mathrm{Triv}))| \geq |\mathcal{X}| &= \sum_{Q \in \mathcal{S}_q(G)} l_q(\mathrm{N}_G(Q)/Q)\\ &= |\mathcal{Y}| = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, a(FG,\mathrm{Triv}) = \dim_K A_K(FG,\mathrm{Triv}),\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus Satz 1.7. □

Die primitiven Idempotente $e_{Q,g}$ $((Q,g) \in \mathcal{X})$ von $A_K(FG,\mathrm{Triv})$ sind damit die Urbilder der kanonischen pritiven Idempotente von $K^{|\mathcal{X}|}$ unter

$$\sigma := \bigoplus_{(Q,g)\in\mathcal{X}} \sigma_{Q,g} \ :\ A_K(FG,\mathrm{Triv}) \to K^{|\mathcal{X}|},$$

d.h. sie werden charakterisiert durch

$$\sigma_{R,h}(e_{Q,g}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (Q,g) \sim_G (R,h),\\ 0, & \text{falls } (Q,g) \not\sim_G (R,h).\end{cases}$$

Bemerkung 5.5. Die vorigen Ergebnisse können wir auch auf folgende Weise veranschaulichen: Wir betrachten die Matrix

$$A := \Big(\sigma_{Q,g}([M])\Big)_{\substack{(Q,g)\in\mathcal{X}\\ M\in\mathcal{Y}}}$$

der Werte aller Species auf der Basis $\mathcal{Y}$ von $A_{\mathcal{O}}(FG,\mathrm{Triv})$. Fassen wir dabei Species und Moduln zusammen, die zur gleichen q-Untergruppe von G gehören bzw. die gleiche q-Untergruppe von G als Vertex haben, so erhält $A = (A_{QR})_{Q,R\in\mathcal{S}_q(G)}$ eine Blockgestalt, wobei A_{QR} die Werte der Species der Form $\sigma_{Q,g}$ auf den unzerlegbaren q-Permutationsmoduln mit Vertex R enthält. Nach Lemma 5.1 ist allerdings $A_{QR} = 0$, falls Q nicht subkonjugiert zu R ist. Ordnet man also $\mathcal{S}_q(G) = \{Q_1, \dots, Q_r\}$ so an, daß $Q_i \not\lesssim Q_j$ für $i > j$ gilt, so nimmt A eine Dreiecksgestalt an:

$$A = \begin{pmatrix} A_{Q_1Q_1} & A_{Q_1Q_2} & \cdots & \cdots & A_{Q_1Q_r} \\ & A_{Q_2Q_2} & \cdots & \cdots & A_{Q_2Q_r} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & A_{Q_rQ_r} \end{pmatrix}$$

Dabei ist $A_{Q_iQ_i}$ für $i = 1, \dots, r$ die Transponierte der Charaktertafel der unzerlegbar projektiven Charaktere von $\mathrm{N}_G(Q_i)/Q_i$. Bezeichnet Φ_i die Brauercharaktertafel und C_i die Cartan-Matrix von $\mathrm{N}_G(Q_i)/Q_i$, so ist also

$$A_{Q_iQ_i}^T = C_i \Phi_i.$$

Da C_i (siehe etwa [**8**, Lemma 18.22]) und Φ_i (siehe Bemerkung 3.3) reguläre Matrizen sind, gilt dies auch für A; insondere sind die Zeilen von A und damit die Species $\sigma_{Q,g}$ ($(Q, g) \in \mathcal{X}$) paarweise verschieden.

Sei jetzt p eine Primzahl. Da $\mathcal{O}$ eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$ ist, existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}$ mit $p \in \mathfrak{p}$, und wir erhalten einen Restklassenkörper $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ der Charakteristik p. Wir wollen $A_k(FG, \mathrm{Triv}) := k \otimes_{\mathcal{O}} A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv}) = k \otimes_{\mathbb{Z}} a(FG, \mathrm{Triv})$ untersuchen. Wie üblich bezeichnen wir mit $\overline{\cdot}$ die Reduktion modulo $\mathfrak{p}$.

Im Gegensatz zum Grothendieck-Ring (Kapitel 4) müssen wir hier die Fälle $p \neq q$ und $p = q$ unterscheiden.

2. Verschiedene Charakteristiken

In diesem Abschnitt seien p und q verschiedene Primzahlen.

Lemma 5.6. *Für jedes Element $g \in G_{p'}$ existiert ein unzerlegbar projektiver FG-Modul P mit $\varphi_P(g) \notin \mathfrak{p}$.*

Beweis. Seien $S_1, \dots, S_r$ Repräsentanten für die Isomorphieklassen von einfachen FG-Moduln, und für $i = 1, \dots, r$ sei P_i die projektive Decke von S_i. Ist C die Cartan-Matrix von FG und

$$v := \begin{pmatrix} \varphi_{S_1}(g) \\ \vdots \\ \varphi_{S_r}(g) \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} \varphi_{P_1}(g) \\ \vdots \\ \varphi_{P_r}(g) \end{pmatrix},$$

so ist $w = Cv$. Wir fassen C als Matrix mit Koeffizienten in $\mathcal{O}$ auf und reduzieren die Gleichung modulo $\mathfrak{p}$. Wegen $\varphi_F(g) = 1$ für den trivialen FG-Modul F ist $\overline{v} \neq 0$, und da $\det C$ eine q-Potenz ist, ist $\det C \notin \mathfrak{p}$, d.h. $\overline{C}$ ist regulär. Folglich ist auch $\overline{w} \neq 0$ und damit $\varphi_{P_i} \notin \mathfrak{p}$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$. $\square$

Satz 5.7. *Für $(Q,g),(R,h) \in X$ gilt:*
$$\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{R,h}} \iff (Q,g_{p'}) \sim_G (R,h_{p'}).$$

Beweis. $\Leftarrow$: Sei M ein q-Permutationsmodul von FG und $\mathrm{Res}^G_{\langle Q,g\rangle} M = M' \oplus M''$, wobei M' eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln mit Vertex Q und M'' eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln mit einer echten Untergruppe von Q als Vertex ist. Mit $\varphi_{M'}$ bezeichnen wir den Brauercharakter von M' als $F[\langle Q,g\rangle/Q]$-Modul. Nach Lemma 4.3 gilt dann:
$$\sigma_{Q,g}([M]) = \varphi_{M'}(gQ) \equiv \varphi_{M'}((gQ)_{p'}) = \varphi_{M'}(g_{p'}Q) = \sigma_{Q,g_{p'}}([M]) \pmod{\mathfrak{p}}.$$
Analog ist $\sigma_{R,h}([M]) \equiv \sigma_{R,h_{p'}}([M]) \pmod{\mathfrak{p}}$. Im Fall $(Q,g_{p'}) \sim_G (R,h_{p'})$ ist daher
$$\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{Q,g_{p'}}} = \overline{\sigma_{R,h_{p'}}} = \overline{\sigma_{R,h}}.$$

$\Rightarrow$: Nach Lemma 5.6 existiert ein unzerlegbar projektiver $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$-Modul N mit $\varphi_N(hQ) \notin \mathfrak{p}$. Für den Green-Korrespondenten N_R von $\mathrm{Inf}_R^{\mathrm{N}_G(R)} N$ gilt also
$$\overline{\sigma_{Q,g}}([N_R]) = \overline{\sigma_{R,h}}([N_R]) = \overline{\varphi_N(hQ)} \neq 0.$$
Da N_R ein unzerlegbarer FG-Modul mit Vertex R ist, folgt $Q \lesssim_G R$ nach Lemma 5.1. Analog ist $R \lesssim_G Q$ und damit $Q \sim_G R$, etwa $Q = {}^xR$ für ein $x \in G$. Daher ist
$$\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{R,h}} = \overline{\sigma_{x^{-1}Q,h}} = \overline{\sigma_{Q,{}^xh}}.$$
Schränkt man diese Gleichung auf q-Permutationsmoduln mit Vertex Q ein, so erhält man $\overline{\sigma_{gQ}} = \overline{\sigma_{{}^xhQ}}$ für die Brauer-Species $\sigma_{gQ}, \sigma_{{}^xhQ}$ von $F[\mathrm{N}_G(Q)/Q]$. Nach Lemma 4.3 und Lemma 5.3 existiert daher ein $y \in \mathrm{N}_G(Q)$ mit $g = {}^{yx}h$, und es gilt:
$${}^{yx}(R,h_{p'}) = ({}^{yx}R, {}^{yx}(h_{p'})) = ({}^yQ, ({}^{yx}h)_{p'}) = (Q,g_{p'}).$$
$\square$

3. Gleiche Charakteristiken

Wir behandeln jetzt den Fall $p = q$. Entscheidend ist hier das folgende Lemma:

Lemma 5.8. *Seien $(Q,g),(R,g) \in X$ mit $Q \leq R$ und $[R,g] \leq Q$. Dann ist $\sigma_{Q,g} \equiv \sigma_{R,g}$ $\pmod{\mathfrak{p}}$.*

Beweis. Im Fall $|R:Q| > p$ existiert ein Q' mit $Q < Q' < R$, und es ist $[Q',g] \leq [R,g] \leq Q \leq Q'$; insbesondere ist $g \in \mathrm{N}_G(Q')$ und damit auch $(Q',g) \in X$. Wegen $|Q':Q| < |R:Q|$ und $|R:Q'| < |R:Q|$ können wir also nach Induktion annehmen, daß $\sigma_{Q,g} \equiv \sigma_{Q',g} \equiv \sigma_{R,g}$ $\pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Daher können wir uns auf den Fall $|R:Q| = p$ beschränken.

Sei M ein q-Permutationsmodul von FG, $\mathrm{Res}^G_{\langle R,g\rangle} M = M' \oplus M'' \oplus M'''$ und $\mathrm{Res}^G_{\langle Q,g\rangle} M = N' \oplus N''$ mit $F\langle R,g\rangle$-Moduln M', M'', M''' und $F\langle Q,g\rangle$-Moduln N', N'', wobei die unzerlegbaren direkten Summanden

- von M' Vertex R haben,
- von M'' und N' Vertex Q haben,
- von M''', N'' keinen Vertex haben, der Q enthält.

Wegen $Q \trianglelefteq \langle R, g\rangle$ operiert Q trivial auf $M' \oplus M''$. Daher haben die unzerlegbaren direkten Summanden von $\mathrm{Res}^{\langle R,g\rangle}_{\langle Q,g\rangle}(M' \oplus M'')$ Vertex Q, d.h. es ist $\mathrm{Res}^{\langle R,g\rangle}_{\langle Q,g\rangle}(M' \oplus M'') \subseteq N'$. Ist andererseits L ein unzerlegbarer direkter Summand von M''' und V ein Vertex von L, so ist $Q \not\leq V$, und jeder Vertex eines unzerlegbaren direkten Summands von $\mathrm{Res}^{\langle R,g\rangle}_{\langle Q,g\rangle} L$ ist konjugiert zu einer Untergruppe von V, enthält also Q nicht. Daher ist $\mathrm{Res}^{\langle R,g\rangle}_{\langle Q,g\rangle} M''' \subseteq N''$. Dies zeigt:

$$\mathrm{Res}^{\langle S,g\rangle}_{\langle Q,g\rangle}(M' \oplus M'') = N'.$$

Seien jetzt $\overline{\langle R,g\rangle} := \langle R,g\rangle/Q$, $\overline{\langle Q,g\rangle} := \langle Q,g\rangle/Q$ und $\overline{g} := gQ$. Fassen wir M', M'' als $F\overline{\langle R,g\rangle}$-Moduln und N' als $F\overline{\langle Q,g\rangle}$-Modul auf, so ist

$$\sigma_{R,g}([M]) = \varphi_{M'}(\overline{g})$$

und

$$\begin{aligned}\sigma_{Q,g}([M]) = \varphi_{N'}(\overline{g}) &= \big(\mathrm{Res}^{\overline{\langle R,g\rangle}}_{\overline{\langle Q,g\rangle}} \varphi_{M'\oplus M''}\big)(\overline{g}) \\ &= \varphi_{M'\oplus M''}(\overline{g}) = \varphi_{M'}(\overline{g}) + \varphi_{M''}(\overline{g}).\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\varphi_{M''}(\overline{g}) \in \mathfrak{p}$ ist.

Jeder unzerlegbare direkte Summand L von M'' ist ein unzerlegbar projektiver $F\overline{\langle R,g\rangle}$-Modul. Wegen $[R,g] \leq Q$ aber ist $\overline{\langle R,g\rangle} = R/Q \times \langle \overline{g}\rangle$, wobei R/Q eine p-Gruppe und $\langle \overline{g}\rangle$ eine zyklische p'-Gruppe ist. Daher ist L isomorph zu $F[R/Q] \otimes_F L'$ für einen 1-dimensionalen $F\langle\overline{g}\rangle$-Modul L' und

$$\mathrm{Res}^{\overline{\langle R,g\rangle}}_{\langle \overline{g}\rangle} L \cong \underbrace{L' \oplus \ldots \oplus L'}_{p}.$$

Folglich ist $\varphi_L(\overline{g}) = p \cdot \varphi_{L'}(\overline{g}) \in \mathfrak{p}$. $\square$

Wir setzen

$$X_0 := \{(Q,g) \in X : [Q,g] = Q\},$$

und für jedes $(Q,g) \in X_0$ definieren wir

$$X_{Q,g} := \{(R,g) \in X : [R,g] = Q\}.$$

Ist $(R,g) \in X$ ein beliebiges Element, so ist $[[R,g],g] = [R,g]$, da g teilerfremd auf R operiert (siehe z.B. [**19**, 7.12]). Dies zeigt, daß (R,g) in einer der Mengen $X_{Q,g}$ ($(Q,g) \in X_0$) enthalten ist. Seien andererseits $(Q,g), (Q',g') \in X_0$ mit $X_{Q,g} \cap X_{Q',g'} \neq \emptyset$, etwa $(R,h) \in X_{Q,g} \cap X_{Q',g'}$. Dann ist $g = h = g'$ und $Q = [R,g] = Q'$. Dies zeigt, daß wir eine disjunkte Zerlegung

$$X = \dot{\bigcup_{(Q,g)\in X_0}} X_{Q,g}$$

haben.

Lemma 5.9. *Sei $(Q,g) \in X_0$. Dann gilt:*

(i) *Für $(R,g) \in X_{Q,g}$ ist $\overline{\sigma_{R,g}} = \overline{\sigma_{Q,g}}$.*
(ii) *Q ist das bzgl. Inklusion kleinste Element in $X_{Q,g}$.*

(iii) *Sei $S \leq \mathrm{N}_G(Q)$, so daß S/Q eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(gQ)$ ist. Dann ist $(S,g) \in X_{Q,g}$ und $p \nmid |\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(S)/S}(gS)|$.*

Beweis. (i) folgt aus Lemma 5.8.

(ii) Für $(R,g) \in X_{Q,g}$ gilt $Q = [R,g] \leq R$.

(iii) Wegen $[S,g] \leq Q = [Q,g] \leq [S,g]$ ist $[S,g] = Q$, also $(S,g) \in X_{Q,g}$. Da g teilerfremd auf S operiert, ist $S = \mathrm{C}_S(g)[S,g] = \mathrm{C}_S(g)Q$ (siehe [**19**, 7.12]). Sei jetzt $R \leq \mathrm{N}_G(S)$, so daß R/S eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(S)/S}(gS)$ ist. Dann ist $[R,g] \leq S \leq R$; insbesondere ist $g \in \mathrm{N}_G(R)$. Daher operiert g auch teilerfremd auf R. Es folgt

$$R = \mathrm{C}_R(g)[R,g] = \mathrm{C}_R(g)S = \mathrm{C}_R(g)\mathrm{C}_S(g)Q = \mathrm{C}_R(g)Q,$$

also

$$R = \mathrm{C}_R(g)Q \cap \mathrm{N}_G(S) = (\mathrm{C}_R(g) \cap \mathrm{N}_G(S))Q$$

wegen $Q \leq \mathrm{N}_G(S)$. Für $x \in \mathrm{C}_R(g) \cap \mathrm{N}_G(S)$ ist aber ${}^xQ = {}^x[S,g] = [{}^xS, {}^xg] = [S,g] = Q$, d.h. $R \leq \mathrm{N}_G(Q)$. Nach Wahl von S ist daher $R = S$. □

Um den nächsten Satz beweisen zu können, benötigen wir ein Analogon zu Lemma 5.6, das für $p = q$ i.a. falsch ist. Es genügt die folgende etwas schwächere Aussage:

Lemma 5.10. *Sei $g \in G_{p'}$. Dann gilt:*

(i) *Für jeden unzerlegbar projektiven FG-Modul P ist $\frac{\varphi_P(g)}{|\mathrm{C}_G(g)|} \in R$.*
(ii) *Es existiert ein unzerlegar projektiver FG-Modul P mit $\frac{\varphi_P(g)}{|\mathrm{C}_G(g)|} \notin \pi R$.*

Beweis. Siehe [**7**, Thm. 84.14]. □

Bemerkung. Sei m der Exponent von G und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $m_{p'}$-te Einheitswurzel. Sowohl R als auch $\mathcal{O}$ enthält die $m_{p'}$-ten Einheitswurzeln, d.h. wir können $\mathbb{Z}[\zeta] \subseteq R$ und $\mathbb{Z}[\zeta] \subseteq \mathcal{O}$ annehmen. Sei $\mathfrak{p}_0$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $p \in \mathfrak{p}_0$. Offenbar ist $\mathfrak{p}_0 \subseteq \pi R$. Da sich an der vorliegenden Situation nichts ändert, wenn wir $\mathfrak{p}$ durch ein anderes Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}$ mit $p \in \tilde{\mathfrak{p}}$ ersetzen, können wir auch $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_0 = \mathbb{Z}[\zeta] \cap \mathfrak{p}$ annehmen. Nun ist $\varphi(g) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ für $g \in G_{p'}$ und jeden Brauercharakter φ von G, und es gilt:

$$\varphi(g) \notin \pi R \;\Rightarrow\; \varphi(g) \notin \mathfrak{p}_0 \;\Rightarrow\; \varphi(g) \notin \mathfrak{p}.$$

Dies zeigt, daß wir im vorigen Lemma R durch $\mathcal{O}$ und πR durch $\mathfrak{p}$ ersetzen können.

Satz 5.11. *Für $(Q,g), (R,h) \in X$ gilt:*

$$\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{R,h}} \iff ([Q,g],g) \sim_G ([R,h],h).$$

Beweis. Wir setzen $Q_0 := [Q,g]$ und $R_0 := [R,h]$.

$\Leftarrow$: Sei $(Q_0,g) \sim_G (R_0,h)$. Wegen $(Q,g) \in X_{Q_0,g}$ und $(R,h) \in X_{R_0,h}$ ist dann

$$\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{Q_0,g}} = \overline{\sigma_{R_0,h}} = \overline{\sigma_{R,h}}$$

nach Lemma 5.9(i).

$\Rightarrow$: Seien $\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{R,h}}$ und $S \leq \mathrm{N}_G(Q_0)$, $T \leq \mathrm{N}_G(R_0)$, so daß S/Q_0 und T/R_0 p-Sylowgruppen von $\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q_0)/Q_0}(gQ_0)$ bzw. $\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(R_0)/R_0}(hR_0)$ sind. Dann sind $(S,g) \in X_{Q_0,g}$, $(T,h) \in X_{R_0,h}$ nach Lemma 5.9(iii) und daher

$$\overline{\sigma_{S,g}} = \overline{\sigma_{Q_0,g}} = \overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{R,h}} = \overline{\sigma_{R_0,h}} = \overline{\sigma_{T,h}}$$

Außerdem ist $p \nmid |\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(S)/S}(gS)|$, d.h. die Konjugationsklasse von gS in $\mathrm{N}_G(S)/S$ ist vom Defekt 0. Daher existiert nach Lemma 5.10 und der Vorbemerkung ein projektiver $\mathrm{N}_G(S)/S$-Modul N mit $\varphi_N(gS) \notin \mathfrak{p}$. Ist N_S der Green-Korrespondent von $\mathrm{Inf}_S^{\mathrm{N}_G(S)} N$, so ist also

$$\overline{\sigma_{T,h}}([N_S]) = \overline{\sigma_{S,g}}([N_S]) = \overline{\varphi_N(gS)} \neq 0.$$

Da N_S ein unzerlegbarer FG-Modul mit Vertex S ist, folgt aus Lemma 5.1, daß T subkonjugiert zu S ist. Aus Symmetriegründen ist daher $S \sim_G T$, etwa $S = {}^xT$ für ein $x \in G$. Folglich ist

$$\overline{\sigma_{S,g}} = \overline{\sigma_{T,h}} = \overline{\sigma_{x^{-1}S,h}} = \overline{\sigma_{S,{}^xh}},$$

und insbesondere $\overline{\sigma_{gS}} = \overline{\sigma_{{}^xhS}}$ für die Brauer-Species σ_{gS}, $\sigma_{{}^xhS}$ von $F[\mathrm{N}_G(S)/S]$. Nach Lemma 4.3 und Lemma 5.3 existiert in diesem Fall ein $y \in \mathrm{N}_G(S)$ mit $g = {}^{yx}h$. Daher ist

$${}^{yx}(R_0,h) = {}^{yx}([T,h],h) = ([{}^{yx}T, {}^{yx}h], {}^{yx}h) = ([{}^yS,g],g) = ([S,g],g) = (Q_0,g).$$

$\square$

Bemerkung. Wir führen die Bemerkung 5.5 fort und übernehmen die Bezeichnungen von dort. Sei $\overline{A}$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die Einträge modulo $\mathfrak{p}$ reduziert. Für zwei Species $\sigma_{Q,g}, \sigma_{R,h}$ von $A_{\mathcal{O}}(FG,\mathrm{Triv})$ ist also $\overline{\sigma_{Q,g}} = \overline{\sigma_{R,h}}$ genau dann, wenn die entsprechenden Zeilen in $\overline{A}$ gleich sind. Da aber Species Ringhomomorphismen sind, ist eine Menge von Species bereits dann linear unabhängig, wenn sie paarweise verschieden sind (siehe z.B. [**3**, Lemma 6.5]). Es folgt, daß die Anzahl der verschiedenen Species $\overline{\sigma_{Q,g}}$ $((Q,g) \in \mathcal{X})$ mit dem Rang von $\overline{A}$ übereinstimmt. Da $\overline{A}$ eine Block-Dreiecksmatrix ist und $\overline{\Phi_i}$ für $i = 1, \dots, r$ regulär ist (siehe Bemerkung 3.3), gilt also:

$$\mathrm{rg}\,\overline{A} \geq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\,\overline{A_{Q_iQ_i}} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(\overline{C_i} \cdot \overline{\Phi_i}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\,\overline{C_i}.$$

Der Rang von $\overline{C_i}$ wiederum ist gleich der Anzahl $n_0(\mathrm{N}_G(Q_i)/Q_i)$ der p'-Konjugationsklassen von $\mathrm{N}_G(Q_i)/Q_i$ vom Defekt 0 (siehe [**7**, (84.10)]).

Sei $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X} \cap X_0$. Ist $(Q,g) \in \mathcal{X}_0$ und $S \leq \mathrm{N}_G(Q)$, so daß S/Q eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(gQ)$ ist, so ist $[S,g] = Q$, und gS ist nach Lemma 5.9 in einer p'-Konjugationsklasse von $N_G(S)/S$ vom Defekt 0 enthalten. Andererseits existiert zu jedem $(R,h) \in X$ genau ein $(Q,g) \in \mathcal{X}_0$ mit $([R,h],h) \sim_G (Q,g)$. Dies zeigt, daß

$$\mathrm{rg}\,\overline{A} \geq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\,\overline{C_i} = \sum_{i=1}^{r} n_0(\mathrm{N}_G(Q_i)/Q_i) \geq |\mathcal{X}_0|$$

ist. Es folgt, daß mindestens $|\mathcal{X}_0|$ verschiedene Species $\overline{\sigma_{Q,g}}$ von $A_k(FG,\mathrm{Triv})$ existieren. Dies liefert eine alternativen Beweis für die $\Rightarrow$-Richtung des vorigen Satzes.

4. Blöcke

Wir setzen

$$X_0 := \begin{cases} \{(Q,g) \in X : g \in \mathrm{N}_G(Q)_{p'}\}, & \text{falls } p \neq q, \\ \{(Q,g) \in X : [Q,g] = Q\}, & \text{falls } p = q, \end{cases}$$

und

$$\mathcal{X}_0 := \mathcal{X} \cap X_0.$$

Wir erinnern daran, daß wir $\mathcal{X}$ zur Veinfachung so gewählt haben, daß für alle $(Q,g) \in \mathcal{X}$ die Untergruppe Q in einem fest gewählten Repräsentantensystem $\mathcal{S}_q(G)$ für die Konjugationsklassen von q-Untergruppen von G enthalten ist. Für $(Q,g) \in \mathcal{X}_0$ sei außerdem

$$\mathcal{X}_{Q,g} := \begin{cases} \{(R,h) \in \mathcal{X} : (R, h_{p'}) \sim_G (Q,g)\}, & \text{falls } p \neq q, \\ \{(R,g) \in \mathcal{X} : ([R,h],h) \sim_G (Q,g)\}, & \text{falls } p = q. \end{cases}$$

Satz 5.12. *Für* $(Q,g) \in \mathcal{X}_0$ *sei*

$$f_{Q,g} := \sum_{(R,h) \in \mathcal{X}_{Q,g}} e_{R,h}.$$

Dann ist $\{\overline{f_{Q,g}} : (Q,g) \in \mathcal{X}_0\}$ *die Menge der primitiven Idempotente von* $A_k(FG, \mathrm{Triv})$.

Beweis. Nennen wir zwei Species $\sigma_{Q,g}, \sigma_{R,h}$ $\mathfrak{p}$-äquivalent, wenn $\sigma_{Q,g} \equiv \sigma_{R,h} \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt, so ist $\mathcal{X}_0$ nach Satz 5.2, Satz 5.7 und Satz 5.11 ein Repräsentantensystem für die $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklassen aller Species von $A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv})$, und für $(Q,g) \in \mathcal{X}_0,\ (R,h) \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\sigma_{Q,g}, \sigma_{R,h}\ \mathfrak{p}\text{-äquivalent} \iff (R,h) \in \mathcal{X}_{Q,g}.$$

Daher folgt die Behauptung aus Satz 1.13. □

Wir erhalten also eine Zerlegung

$$A_k(FG, \mathrm{Triv}) = \bigoplus_{(Q,g) \in \mathcal{X}_0} A_k(FG, \mathrm{Triv})\overline{f_{Q,g}}$$

von $A_k(FG, \mathrm{Triv})$ in seine Blöcke $A_k(FG, \mathrm{Triv})\overline{f_{Q,g}}$.

Satz 5.13. *Sei* $(Q,g) \in \mathcal{X}_0$. *Der Block* $A_k(FG, \mathrm{Triv})\overline{f_{Q,g}}$ *ist genau dann einfach, wenn* $p \nmid |\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(gQ)|$ *ist. Insbesondere ist* $A_k(FG, \mathrm{Triv})$ *genau dann halbeinfach, wenn* $p \nmid |G|$ *ist.*

Beweis. Seien $(Q,g) \in \mathcal{X}_0$ und $C := \mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(gQ)$. Nach Satz 1.15 gilt:

$$A_k(FG, \mathrm{Triv})\overline{f_{Q,g}} \text{ einfach} \iff |\mathcal{X}_{Q,g}| = 1.$$

Sei zuerst $p \neq q$. Ist $|\mathcal{X}_{Q,g}| > 1$, so existiert ein $h \in G_{q'}$ mit $(Q,h) \in \mathcal{X}_{Q,g}$ und $hQ \not\sim_{\mathrm{N}_G(Q)/Q} gQ$, aber $(hQ)_{p'} \sim_{\mathrm{N}_G(Q)/Q} gQ$ wegen $h_{p'} \sim_G g$. Daher ist $1 \neq (hQ)_p \in \mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}((hQ)_{p'})$, also

$$p \mid |\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}((hQ)_{p'})| = |C|.$$

Ist umgekehrt $p \mid |C|$ und $\overline{h}$ ein Element der Ordnung p in C, so existiert ein $h \in G_p \setminus \{1\}$ mit $\overline{h} = hQ$ und $(gh)_{p'} = g$. Dann ist $(Q, gh) \not\sim_G (Q, g)$, aber (Q, gh) ist bis auf Konjugation in $\mathcal{X}_{Q,g}$ enthalten. Dies zeigt, daß $|\mathcal{X}_{Q,g}| > 1$ ist.

Sei jetzt $p = q$. Im Fall $|\mathcal{X}_{Q,g}| > 1$ existiert ein von (Q, g) verschiedenes Tupel $(R, h) \in \mathcal{X}_{Q,g}$, d.h. es ist $([R, h], h) \sim_G (Q, g)$, etwa $g = {}^x h$ und $Q = {}^x[R, h] = [{}^x R, g]$ für ein $x \in G$. Wegen $(R, h) \not\sim_G (Q, g)$ ist daher $Q \triangleleft {}^x R$ und ${}^x R/Q \leq C$, also

$$p \;\big|\; |{}^x R : Q| \;\big|\; |C|.$$

Sei umgekehrt $p \mid |C|$ und $S \leq \mathrm{N}_G(Q)$, so daß S/Q eine p-Sylowgruppe von C/Q ist. Dann ist $[S, g] = Q$ und (S, g) bis auf Konjugation in $\mathcal{X}_{Q,g}$ enthalten, aber $(S, g) \not\sim_G (Q, g)$. Es folgt $|\mathcal{X}_{Q,g}| > 1$.

Im Fall $p \nmid |G|$ ist natürlich $p \nmid |\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(gQ)|$ für alle $(Q, g) \in \mathcal{X}_0$ und damit $A_k(FG, \mathrm{Triv})$ halbeinfach. Andererseits ist $\mathrm{C}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(gQ) = G/1$ für $(Q, g) = (1, 1) \in \mathcal{X}_0$. Ist p ein Teiler von G, so ist der Block $A_k(FG, \mathrm{Triv})\overline{f_{1,1}}$ also nicht einfach. □

Satz 5.14. $a(FG, \mathrm{Triv})$ *besitzt keine nichttrivialen Idempotente.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $A_{\mathcal{O}}(FG, \mathrm{Triv})$ keine nichttrivialen Idempotente besitzt. Nach Satz 1.10 und Lemma 1.4 müssen wir dazu für jedes $(Q, g) \in X$ Primideale $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathcal{O}$ und Elemente $(Q_{-1}, g_{-1}) = (1, 1), (Q_0, g_0), \ldots, (Q_n, g_n) = (Q, g) \in X$ mit $\sigma_{Q_{i-1}, g_{i-1}} \equiv \sigma_{Q_i, g_i} \pmod{\mathfrak{p}_i}$ für $i = 0, \ldots, n$ angeben.

Seien $\{p_1, \ldots, p_n\}$ die von q verschiedenen Primteiler von $|G|$, und für $i = 0, \ldots, n$ sei

$$g_i := \prod_{j=0}^{i} g_{p_i}.$$

Für $i = 1, \ldots, n$ ist dann $(Q, g_i) \in X$ und $(g_i)_{p_i'} = g_{i-1}$, also $\sigma_{Q, g_{i-1}} \equiv \sigma_{Q, g_i} \pmod{\mathfrak{p}_i}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}_i$ in $\mathcal{O}$ mit $p_i \in \mathfrak{p}_i$ nach Satz 5.7. Außerdem ist

$$\sigma_{Q_0, g_0} \equiv \sigma_{[Q_0, g_0], g_0} \equiv \sigma_{[Q_0, 1], 1} \equiv \sigma_{1,1} \pmod{\mathfrak{q}}$$

für ein Primideal $\mathfrak{q}$ in $\mathcal{O}$ mit $q \in \mathfrak{q}$ nach Satz 5.11. Daraus folgt die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[1] Jon L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 11, Cambridge University Press, 1986.

[2] Emil Artin, *Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **164** (1931), 1–11.

[3] David J. Benson and Richard A. Parker, *The Green ring of a finite group*, J. Algebra **87** (1984), 290–331.

[4] S. D. Berman, *Characters of linear representations of finite groups over arbitrary fields*, Matem. Sb. **44** (1958), 409–456.

[5] Richard Brauer, *Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers*, Math. Nachr. **4** (1951), 158–174.

[6] S. B. Conlon, *Relative components of representations*, J. Algebra **8** (1968), 478–501.

[7] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, John Wiley & Sons, 1962.

[8] ———, *Methods of representation theory*, Wiley-Interscience, 1987.

[9] Andreas Dress, *A characterisation of solvable groups*, Math. Z. **110** (1969), 213–217.

[10] David Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex*, Illinois J. Math. **25** (1981), 63–67.

[11] James A. Green, *The modular representation algebra of a finite group*, Illinois J. Math. **6** (1962), 607–619.

[12] William H. Gustafson, *Burnside rings which are Gorenstein*, Comm. Algebra **5** (1977), 1–15.

[13] D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p*, Duke Math. J. **21** (1954), 377–381.

[14] I. Martin Isaacs, *Character theory of finite groups*, Dover Publications, 1976.

[15] Eliot Jacobson, *The Burnside ring modulo a prime*, J. Algebra **99** (1986), 58–71.

[16] Nathan Jacobson, *Basic algebra*, vol. II, Freeman, 1980.

[17] Dennis Kletzing, *Local splittings and multiplicities of closed algebras*, Comm. Algebra **7** (1979), 941–954.

[18] Helmut Krämer, *Über die injektive Dimension des Burnsideringes einer endlichen Gruppe*, J. Algebra **30** (1974), 294–304.

[19] Hans Kurzweil, *Endliche Gruppen*, Springer-Verlag, 1977.

[20] M. F. O'Reilly, *On the semisimplicity of the modular representation algebra of a finite group*, Illinois J. Math. **9** (1965), 261–276.

[21] Louis Solomon, *The Burnside algebra of a finite group*, J. Comb. Theory **2** (1967), 603–615.

[22] M. J. Taylor, *On the structure of certain completed character rings*, J. Algebra **76** (1982), 226–233.

[23] I. Virág, *Generalisation of certain theorems on p-subgroups*, Mathematica **37**(60) (1995), 239–242.

[24] Tomoyuki Yoshida, *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, J. Algebra **80** (1983), 90–105.

[25] ______, *On the unit groups of Burnside rings*, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Markus Deiml
Geburtsdatum:	28. Juli 1968
Geburtsort:	Augsburg
Familienstand:	verheiratet, 1 Tochter

Ausbildungs- und Berufsdaten:

1974 – 1978	Grundschule Friedberg
1978 – 1987	Wernher-von-Braun-Gymnasium Friedberg
Juni 1987	Abitur
1987 – 1988	Wehrdienst als Wehrpflichtiger
1988 – 1993	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Augsburg
Nov. 1990	Vordiplom
Okt. 1993	Diplom
1994 – 1995	Stipendiat der Universität Augsburg
seit März 1995	Wissenschaftlicher Angestellter an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Jena, 23. Juni 1997